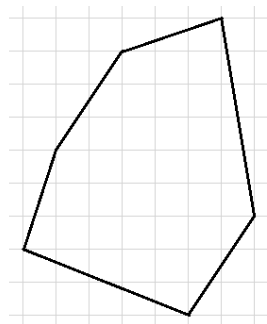
XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024
5 класс

5.1. Придумайте хотя бы одно число, чтобы одна из его цифр была в 4 раза меньше суммы всех цифр, а другая из его цифр была в 5 раз меньше суммы всех его цифр.

5.2. Алина на уроке рисования нарисовала в тетради шестиугольник, как на рисунке. Следующий урок был уроком математики, и там её спросили: какая у этого шестиугольника площадь. Помогите Алине и найдите площадь этого шестиугольника (сторона клетки равна 1 сантиметру).



5.3. Добрыня каждый день добирается до школы пешком, проходя 2 километра. По пути он проходит 10 кварталов, тратя на каждый квартал 1 минуту. 1 мая перекрыли один квартал на привычном пути Добрыни и ему пришлось пройти на 2 квартала больше, чтобы добраться до школы. Сколько метров в минуту надо проходить Добрыне, чтобы потратить теперь на свой путь то же время, что и обычно.

5.4. Провожая 2023-й год, 5 класс играл в нетайного Санту. Дети сели в круг и каждый подарил несколько подарков своему левому соседу, а потом подарил правому соседу столько же подарков, сколько получил от него. После этого мальчик Дима заявил, что всего в игре было 2023 подарка, а девочка Катя – что 2024. Известно, что кто-то из них прав. Определите, кто именно, если полученные один раз подарки никто не передаривал.

5.5. В алфавите племени Ывузак есть только три согласные: **В**, **З** и **К** и только три гласные: **У**, **А** и **Ы**. Старейшина племени Пикадор заметил в слове ВУЗАКА два хороших свойства: 1) Гласные и согласные буквы в этом слове чередуются; 2) В этом слове пары соседних букв: ВУ, УЗ, ЗА, АК и КА – не повторяются. Помогите старейшине найти максимальное по длине слово (если их несколько, то годится любое), в котором также выполняются оба хороших свойства и убедите старейшину в том, что его длина максимальна.

5.6. В ряд стоит 11 стульев. Два ведущих решили сыграть в игру: они по очереди сажают на эти стулья людей из зала, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. После того, как все стулья оказались заняты, все сидящие на стульях, если могут, говорят фразу "Рядом со мной сидят рыцарь и лжец" (рыцари при этом должны сказать правду, а лжецы – солгать). Если будет произнесено нечётное число фраз, выигрывает начинающий, а если чётное – его соперник. Кто из ведущих может выиграть независимо от игры соперника? (Можно считать, что в зале как рыцарей, так и лжецов больше 11.)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

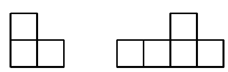
6 класс

6.1. Маша и Даша получили в столовой кашу. Если забрать у Маши треть всей её каши и выдать Даше треть всей её каши, то у девочек будет поровну каши. Во сколько раз Маша получила больше каши, чем Даша?

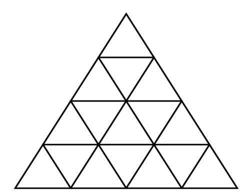
6.2. В игре "Весёлая ферма" два вида валюты: лимоны и капуста. В январе пользователь заплатил за подписку один лимон и 7 капуст, в феврале – 5 лимонов и капусту. На март у него осталось 3 лимона и 3 капусты. Хватит ли этого для оплаты подписки, если цена подписки не меняется из месяца в месяц?

6.3. У Александра есть шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Он разбил эти числа на 3 пары, перемножил числа в каждой паре, сложил эти три произведения, и только их сумму выписал на доску. Потом он снова разбил те же шесть чисел по парам множителей (возможно других), нашел произведения, а их сумму снова выписал на доску. Александр до сих пор разбивает числа на пары множителей, суммирует произведения и выписывает суммы. Может ли так случится, что в какой-то момент среди записанных на доске чисел будет 6 различных чётных?

6.4. Квадрат 7×7 разрезали без остатка на фигурки двух типов, как показано на рисунке (фигурки можно любыми способами поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок из 5 клеток могло получится при разрезании?



6.5. В треугольной таблице из 16 клеток (см. рисунок) в каждой клетке расположен либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который говорит только ложь. Люди называются соседями, если треугольники с ними имеют общий отрезок границы. Каждый из 16 человек произнёс фразу: "Среди моих соседей нечётное число рыцарей". Какое наибольшее число рыцарей может быть в таблице?



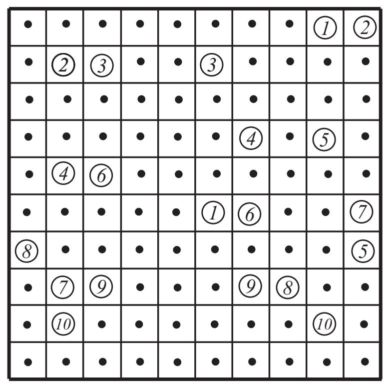
6.6 Ученики некоторого класса создали несколько чатов, в каждом из которых больше одного человека. Известно, что нет пары чатов, в которых ровно один общий ученик. На 14 февраля учитель хочет разделить класс на две группы: одну отвести в музей, а другую – в театр. Докажите, что он может сделать это таким образом, чтобы в каждом чате оказался и ученик, который сходил в театр, и ученик, который сходил в музей.

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

7 класс

7.1. Соедините центры кругов с одинаковыми номерами (см. рисунок) десятью замкнутыми непересекающимися ломаными (каждая ломаная соединяет центры ровно двух кругов) так, что все звенья каждой ломаной параллельны сторонам квадрата, а концы звеньев лежат в отмеченных на рисунке точках — серединах соответствующих клеток.



7.2. Докажите, что число
$$256^2 + 253 \cdot 254 \cdot 258 \cdot 259$$
является квадратом натурального числа.

7.3. Расстояние между городами равно 2024 км. Путешественник преодолел это расстояние на велосипеде, проезжая каждый день целое число километров, не меньшее 70, но не большее 80. При этом в каждый чётный день пути он проезжал одинаковое расстояние; в каждый нечётный — тоже одинаковое, но другое. Сколько километров проезжал путешественник в чётный и сколько в нечётный день? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

7.4. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойством: вычеркнув некоторые его цифры (все, кроме двух) можно получить любое наперёд заданное двузначное число. Ответ обоснуйте.

7.5. Имеется 14 пробирок с кислотой; в первой ровно 1 мл, во второй — 2 мл в третьей — 3 мл и так до последней, в которой 14 мл кислоты. Также имеется пустая склянка ёмкостью 100 мл. Старший и младший лаборанты (старший начинает) по очереди выливают кислоту из пробирок в склянку; каждый в свой ход полностью опорожняет одну выбранную им пробирку (любую из ещё не опустевших). Тот из лаборантов, после хода которого склянка переполнится, берёт на себя ответственность за пролитую кислоту и будет делать уборку в лаборатории; разумеется, ни тот, ни другой лаборанты этого не хотят. Кто, старший или младший лаборант, может избежать участи уборщика, как бы его коллега этому не препятствовал? Ответ обоснуйте.

7.6. На сторонах AB и DA квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки P и M так, что $BP = AM$. Докажите, что $2PM \geqslant AC$.

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

8 класс

8.1. Заряда аккумулятора хватит, чтобы одна лампа горела ровно один час. К аккумулятору подключено 5 ламп, у каждой лампы есть свой выключатель. Если горит несколько ламп, то заряд распределяется между ними равномерно. Если лампа горела непрерывно в течение 10 минут, она начинает мигать. Как только заряд аккумулятора заканчивается, все лампы отключаются. Как отмерить ровно 22 минуты?

8.2. Максим загадал натуральное число n, сложил все натуральные числа от n до $n+10$ и получил число M. Антон взял эти же самые натуральные числа, перемножил их и получил число A. Оказалось, что последние четыре цифры M совпадают с последними четырьмя цифрами A. Какими могут быть эти четыре цифры? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

8.3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведена высота CH. M – точка пересечения CH и биссектрисы угла BAC. Точка K на отрезке BH такова, что $MK \perp AM$ и $HK : BK = 1 : 8$. Найдите острые углы треугольника ABC.

8.4. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c таких, что число

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}+\frac{1}{c+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}}$$

является целым.

8.5. Некоторый алфавит состоит из n букв. Строку S, составленную из букв этого алфавита, будем называть *универсальной*, если вычёркиванием букв из S можно получить любую перестановку алфавита. Какова наименьшая возможная длина универсальной строки, если:

а) $n = 2$; (1 балл)

б) $n = 3$? (3 балла)

Существует ли для $n = 4$ универсальная строка длины:

в) 11; (5 баллов)

г) 12; (3 балла)

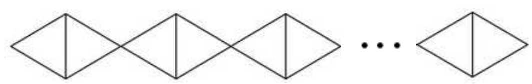
д) 13? (2 балла)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

9 класс

9.1. Сколькими способами можно раскрасить в красный, синий и зелёный цвета вершины указанного на рисунке графа таким образом, чтобы всякие две вершины, соединённые ребром, имели различные цвета? (Всего 2024 треугольника)



9.2. Сначала на доске было написано одно натуральное число $X < 2024$. Паша несколько раз проделывал следующую операцию: стирал с доски одно из имеющихся там чисел (назовём его A), а вместо него выписывал на доску два других числа: $2 \cdot A$ и $3 \cdot A$. Когда Паша закончил свои операции, сумма всех оставшихся на доске чисел равнялась 2024. Найдите все возможные значения X. Приводить примеры действий Паши не нужно.

9.3. Действительные числа a, b, c таковы, что $a^2bc + ab^2c + abc^2 = 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{bc}\right)^2 - 1.$$

9.4. Точка K – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, точка M – середина стороны BC. На отрезке AB нашлась точка P такая, что $\angle BKP = \angle PBM$ и $\angle PMB = \angle PBK$. Докажите, что $AB = 3AC$.

9.5. В каждую клетку доски $n \times m$ положили по одной монете. Монету, лежащую орлом вверх, разрешено забрать; при этом все монеты, лежащие в соседней по стороне клетке с забираемой, переворачиваются. Если действуя таким образом, возможно забрать все монеты с доски, раскладка монет называется *разрешимой*. Изначально орлом вверх лежит k монет.

а) Докажите, что если $m = 1$ и k нечётное, то раскладка разрешима; (3 балла)

б) Докажите, что если числа m и k нечётные, то раскладка разрешима; (4 баллов)

в) Докажите, что если раскладка разрешима, то число $nm + n + m + k$ чётное; (5 баллов)

г) Обязательно ли раскладка разрешима, если число $nm + n + m + k$ чётное? (2 балла)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024
10 класс

10.1. Клуб "Медитация морем" собрал 27 роликов шума прибоя длительностью 1, 2, ..., 27 часов. Ролики были с архипелагов: Галапагосы, Занзибар и Кергелен. Средняя продолжительность ролика с Галапагосов — 3 часа, с Кергелен — 18 часов, а с Занзибара — 15 часов. Сколько роликов с каждого архипелага оказалось в распоряжении клуба "Медитация морем"? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

10.2. Чапаев написал многочлен 2024 степени и Петька написал многочлен 2024 степени. Потом каждый из них возвел свой многочлен в квадрат, после чего эти квадраты вычли один из другого. Получился ненулевой многочлен. Верно ли, что его степень хотя бы 2024?

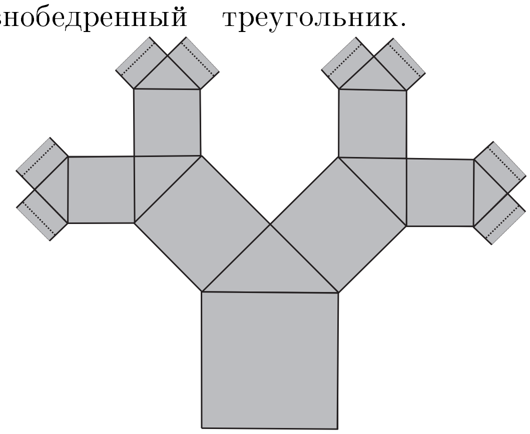
10.3. В начале игры "Стол Короля Артура" в зале находятся 100 рыцарей и 500 лжецов, а на сцене — двое ведущих и круглый стол на 13 персон. Каждый ведущий в свой ход выбирает свободное место и приглашает на него зрителя из зала. После того как все 13 мест за столом заняты, все сидящие кричат фразу «И рыцарь, и лжец — мой сосед», если, конечно, могут это сделать (рыцари всегда правдивы, лжецы – наоборот, а ведущие знают всех). Если фразу прокричат нечётное число сидящих за столом, выигрывает первый ведущий, а если чётное – второй. Кто из ведущих может выиграть независимо от игры соперника?

10.4. Билл Кайфер собрался нарисовать равносторонний треугольник на бумаге в клеточку. Помогите ему, для чего при любых действительных ненулевых a и b решите систему

$$a^2 + y^2 = b^2 + z^2 = (a - b)^2 + (y - z)^2,$$

то есть выразите y и z через a и b и докажите, что других решений нет.

10.5. Зенон нарисовал квадрат со стороной 1, затем, на одной из его сторон, как на гипотенузе, построил прямоугольный равнобедренный треугольник. На каждом последующем шаге, на всех катетах вновь полученных равнобедренных прямоугольных треугольников он строил по еще одному квадрату, у каждого из которых, на противоположной стороне, как на гипотенузе, рисовал новый равнобедренный прямоугольный треугольник. После того, как эта процедура была повторена бесконечное число раз, он получил узор Ф (на рисунке справа нарисована лишь часть узора).



а) Можно ли совершить бесконечное число оборотов, пройдя по линиям узора Ф маршрут конечной длины? (2 балла)

б) Можно ли из любой точки узора Ф в любую другую его точку проложить проходящий по линиям узора маршрут длины не больше 100? (4 балла)

в) Если закрасить в узоре Ф все построенные квадраты и равнобедренные прямоугольные треугольники, то конечна ли закрашенная площадь? (2 балла)

г) Конечна ли суммарная длина всех линий узора Ф? (6 баллов)

XXIII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2024

11 класс

11.1. Сколькими способами можно раскрасить в красный, синий и зелёный цвета вершины указанного на рисунке графа таким образом, чтобы всякие две вершины, соединённые ребром, имели различные цвета? (Всего 2024 треугольника и 1012 квадратов)

11.2. В клетки таблицы 3×3 вписаны цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, каждая по одному разу. В этой таблице можно прочесть три трёхзначных числа, читая слева направо, и ещё три трёхзначных числа, читая сверху вниз. Может ли оказаться так, что эти 6 чисел в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию?

11.3. Докажите, что для всех чисел x, y, где $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, выполнено неравенство

$$\cos x - \cos y < \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

11.4. Дан квадрат $ABCD$ и точка E, не лежащая в плоскости квадрата, такая, что ABE — равносторонний треугольник. Высоты треугольника CDE пересекаются в точке H. Докажите, что треугольник ABH — равносторонний.

11.5. Пусть $N \geqslant 4$ — натуральное число. Число $S(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ назовём *приближением* числа $\sqrt{N}$, если x, y — натуральные числа, а разность $\sqrt{N} - S(x, y)$ неотрицательна. Среди всех приближений $\sqrt{N}$ назовём *наилучшим приближением* то, при котором разность $\sqrt{N} - S(x, y)$ минимальна. Наилучшее приближение $\sqrt{N}$ обозначим за S_N. Например,

$$S_5 = \sqrt{1} + \sqrt{1},$$

$$S_6 = \sqrt{1} + \sqrt{2},$$

$$S_{15} = \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

а) Докажите, что $\sqrt{N} \geqslant S_N > \sqrt{N} - 1$. (2 балла)

б) Пусть $N = 2k$ — чётное число. Найдите наилучшее приближение $S(x, y)$ числа $\sqrt{N}$ при ограничении $x + y = k$. (4 балла)

в) Докажите, если $N = 2k$, где k — нечётное простое число, то $S_N \neq \sqrt{N}$. (3 балла)

г) Докажите, что при простом нечётном k полученное в пункте (б) приближение на самом деле является S_N (даже без ограничений на сумму $x + y$). (5 баллов)

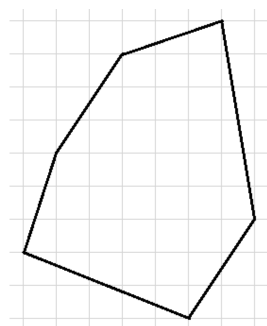
РЕШЕНИЯ

5 класс

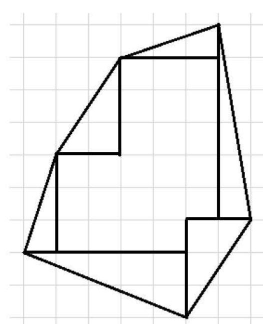
5.1. *Придумайте хотя бы одно число, чтобы одна из его цифр была в 4 раза меньше суммы всех цифр, а другая из его цифр была в 5 раз меньше суммы всех его цифр.*

Решение. Например, подойдёт число 4925. Сумма цифр 20, 4 в пять раз меньше 20 и 5 в четыре раза меньше 20.

5.2. *Алина на уроке рисования нарисовала в тетради шестиугольник, как на рисунке. Следующий урок был уроком математики, и там её спросили: какая у этого шестиугольника площадь. Помогите Алине и найдите площадь этого шестиугольника (сторона клетки равна 1 сантиметру).*



Решение. Разобьем нашу фигуру, на области, как показано на рисунке. Площадь каждого из прямоугольных треугольников равна половине площади соответственного прямоугольника. Тогда площадь всей фигуры равна: $23 + 3 + 1,5 + 3 + 3 + 5 + 1,5 = 40$.



5.3. *Добрыня каждый день добирается до школы пешком, проходя 2 километра. По пути он проходит 10 кварталов, тратя на каждый квартал 1 минуту. 1 мая перекрыли один квартал на привычном пути Добрыни и ему пришлось пройти на 2 квартала больше, чтобы добраться до школы. Сколько метров в минуту надо проходить Добрыне, чтобы потратить теперь на свой путь то же время, что и обычно.*

Решение. Обычный путь Добрыни составляет 2 км, за 10 кварталов, значит один квартал 200 м, а значит скорость Добрыни 200 м/мин. 1 мая длина пути Добрыни составит 12 кварталов — 2400 м. Чтобы пройти 2400 м за 10 минут, необходимо двигаться со скорость 240 м/мин.

Ответ. 240 м/мин.

5.4. *Провожая 2023-й год, 5 класс играл в нетайного Санту. Дети сели в круг и каждый подарил несколько подарков своему левому соседу, а потом подарил правому соседу столько же подарков, сколько получил от него. После этого мальчик Дима заявил, что всего в игре было 2023 подарка, а девочка Катя – что 2024. Известно, что кто-то из них прав. Определите, кто именно, если полученные один раз подарки никто не передаривал.*

Решение. Пусть мальчик Петя получил x подарков от правого соседа, тогда и отдал он тоже x подарков правому соседу, а значит суммарно в обмене с правым соседом Пети участвовало $2x$ подарков — чётное число. Рассмотрим все пары соседних детей, в каждой паре было использовано четное число подарков, а значит и всего было использовано чётное число подарков, а значит права Катя.

Ответ. Катя.

5.5. *В алфавите племени Ывузак есть только три согласные:* ***В***, ***З*** *и* ***К*** *и только три гласные:* ***У***, ***А*** *и* ***Ы***. *Старейшина племени Пикадор заметил в слове ВУЗАКА два хороших свойства: 1) Гласные и согласные буквы в этом слове чередуются; 2) В этом слове пары соседних букв: ВУ, УЗ, ЗА, АК и КА – не повторяются. Помогите старейшине найти максимальное по длине слово (если их несколько, то годится любое), в котором также выполняются оба хороших свойства и убедите старейшину в том, что его длина максимальна.*

Решение. Оценка. Заметим, что букв в слове на 1 больше, чем пар соседних букв. Всего возможных пар гласная согласная с учётом порядка $2 \times 3 \times 3 = 18$. Значит длина слова не превосходит 19.

Пример. ВАЗАКАВУЗУКУВЫЗЫКЫВ.

Ответ. 19.

5.6. *В ряд стоит 11 стульев. Два ведущих решили сыграть в игру: они по очереди сажают на эти стулья людей из зала, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. После того, как все стулья оказались заняты, все сидящие на стульях, если могут, говорят фразу "Рядом со мной сидят рыцарь и лжец" (рыцари при этом должны сказать правду, а лжецы – солгать). Если будет произнесено нечётное число фраз, выигрывает начинающий, а если чётное – его соперник. Кто из ведущих может выиграть независимо от игры соперника? (Можно считать, что в зале как рыцарей, так и лжецов больше 11.)*

Решение. Пусть первым ходом первый ведущий на шестое (центральное) место посадит лжеца. После этого все места разобьются на две группы: с 1 по 5 и с 7 по 11. Тогда давайте разобьем места на пары $(1, 11)$, $(2, 10)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$ и $(5, 7)$. Пускай второй как-то сходил, тогда первый дублирует этот ход на месте из пары. Таким образом слева и справа от центрального места будет произнесено поровну фраз и центральный лжец также произнесет фразу, так как рядом с ним будут представители одного племени, а значит фраз будет произнесено нечётное количество.

6 класс

6.1. *Маша и Даша получили в столовой кашу. Если забрать у Маши треть всей её каши и выдать Даше треть всей её каши, то у девочек будет поровну каши. Во сколько раз Маша получила больше каши, чем Даша?*

Решение. В тот момент, когда у девочек стало поровну каши, обозначим кашу одной из девочек за $4x$. Даше выдали треть её изначального количества, таким образом у неё оказалось четыре изначальные трети, а изначально у Даши было три трети каши, то есть $3x$. А у Маши – наоборот, осталось две трети от изначального количества. Получается, треть машиной каши это $2x$ и всего у неё изначально было $6x$ каши. Для того, чтобы найти ответ надо Машину кашу ($6x$) поделить на Дашину ($3x$) и получить 2.

Ответ. 2.

6.2. *В игре "Весёлая ферма" два вида валюты: лимоны и капуста. В январе пользователь заплатил за подписку один лимон и* 7 *капуст, в феврале –* 5 *лимонов и капусту. На март у него осталось* 3 *лимона и* 3 *капусты. Хватит ли этого для оплаты подписки, если цена подписки не меняется из месяца в месяц?*

Решение. Всего за первые два месяца подписки пользователь заплатил 6 лимонов и 8 капуст. Тогда месячная подписка стоит 3 лимона и 4 капусты. Получается, что трёх лимонов и трёх капуст недостаточно.

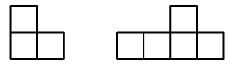
Ответ. Не хватит.

6.3. *У Александра есть шесть чисел:* 1, 2, 3, 4, 5 *и* 6. *Он разбил эти числа на* 3 *пары, перемножил числа в каждой паре, сложил эти три произведения, и только их сумму выписал на доску. Потом он снова разбил те же шесть чисел по парам множителей (возможно других), нашел произведения, а их сумму снова выписал на доску. Александр до сих пор разбивает числа на пары множителей, суммирует произведения и выписывает суммы. Может ли так случится, что в какой-то момент среди записанных на доске чисел будет* 6 *различных чётных?*

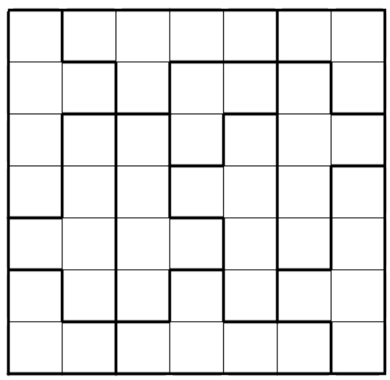
Решение. Числа, которые Александр перемножал перед сложением, будем называть парными. Заметим, что если есть парные нечётные числа, то оставшееся нечётное число парно чётному, и оставшиеся чётные числа парны между собой. Получается сумма $\text{Н} \times \text{Н} + \text{Ч} \times \text{Н} + \text{Ч} \times \text{Ч} = \text{Н}$. Аналогично получается, если чётное число парно с нечётным. Если мы хотим чётную сумму, любое нечётное число должно быть парным с чётным. Заметим, что есть три варианта подобрать число, парное единице, на каждый из них – два варианта подобрать число, парное тройке, и в конце остаётся число, парное пятёрке. Итого 6 вариантов. Но у нас есть две пары совпадающих: $1\times2+3\times6+5\times4 = 1\times4+3\times2+5\times6 = 40$ и $1\times4+3\times6+5\times2 = 1\times6+3\times2+5\times4 = 32$. Получается, что всего на доске могут быть не более 4 чётных чисел, что тем более меньше шести.

Ответ. Не может.

6.4. *Квадрат 7×7 разрезали без остатка на фигурки двух типов, как показано на рисунке (фигурки можно любыми способами поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок из 5 клеток могло получится при разрезании?*



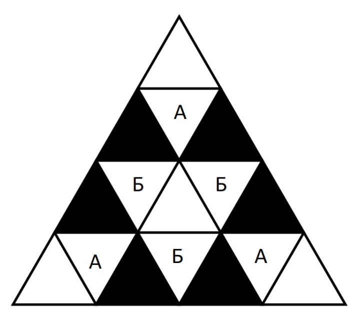
Решение. Для начала предъявим пример на 8 пятиклеточных фигур (см. рисунок). Если же пятиклеточных фигур будет больше 8, тогда рассмотрим два случая. Первый – если их 9. Тогда они будут занимать 45 клеток, и останется 4 клетки, которые на трёхклеточные уголки не разрежешь. Второй – если пятиклеточных фигур хотя бы 10. Тогда они будут занимать 50 клеток, что по площади больше квадрата.



Ответ. 8.

6.5. *В треугольной таблице из 16 клеток (см. рисунок) в каждой клетке расположен либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который говорит только ложь. Люди называются соседями, если треугольники с ними имеют общий отрезок границы. Каждый из 16 человек произнёс фразу: "Среди моих соседей нечётное число рыцарей". Какое наибольшее число рыцарей может быть в таблице?*

Решение. Выделим шесть клеток сетки, примыкающих к сторонам. У них два соседа. Поэтому либо на этих клетках стоят лжецы, либо среди их соседей есть лжецы. Поскольку никакая из клеток не является соседом сразу для трёх из указанных клеток, то каждый лжец исправляет не более двух выделенных клеток, и нам нужно хотя бы три лжеца. Заметим, что справиться с шестью клетками ровно за 3 лжеца мы можем только двумя способами: клетками типа А или клетками типа Б, в каждом из которых остаётся клетка (угловая или центральная), для которой условия не выполняются. Поэтому необходимы хотя бы 4 лжеца, что соответствует варианту, где не более 12 рыцарей. Пример получается, если в центральную клетку и всех её соседей



(клетки типа Б) посадить лжецов. (Заметим, что последний переход (от трёх лжецов к четырём) можно чуть более изящным способом, представив нашу конструкцию в виде графа, где вершинами являются рыцари, а соединяются они в том случае, если клетки, соответствующие им, соседние. Тогда лемма о рукопожатиях сразу скажет нам, что вариант с 13 рыцарями невозможен)

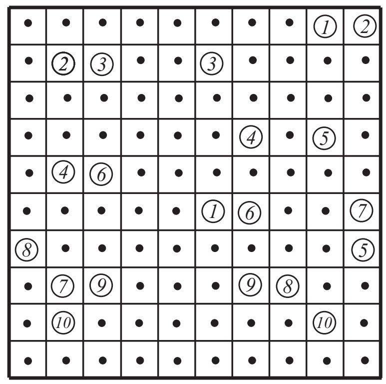
Ответ. 13.

6.6 *Ученики некоторого класса создали несколько чатов, в каждом из которых больше одного человека. Известно, что нет пары чатов, в которых ровно один общий ученик. На* 14 *февраля учитель хочет разделить класс на две группы: одну отвести в музей, а другую – в театр. Докажите, что он может сделать это таким образом, чтобы в каждом чате оказался и ученик, который сходил в театр, и ученик, который сходил в музей.*

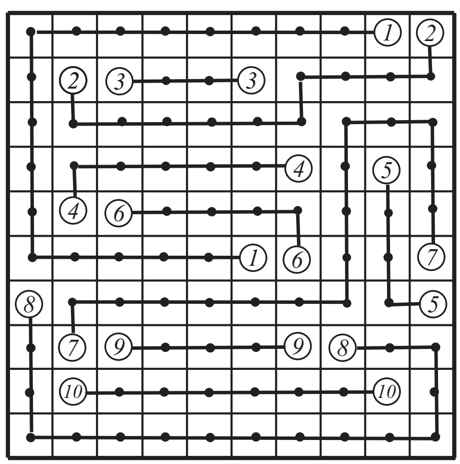
Решение. Давайте изначально произвольным образом разобьём учеников на группы и будем по очереди отслеживать чаты. Если в очередном чате, который мы смотрим, есть представители обоих групп, мы идём к следующему чату. Если нет, то, не нарушая общности, предположим, что в этом чате (назовём его чат А) все идут в музей. Возьмём произвольного ученика (назовём его Иннокентий) этого чата и определим его в театр. В этом случае, рассматриваемый чат станет чатом, в котором все, кроме Иннокентия, идут в музей. Если какой-то из *уже отсмотренных* чатов (назовём его Б) перестанет подходить под условие, то тогда в нём точно есть Иннокентий. И, после смены группы у него, Иннокентий, а значит и все будут посланы в театр, а значит до смены группы у Иннокентия в театр были определены все, кроме Иннокентия. Получается, что в чатах А и Б был ровно один общий ученик: Иннокентий (так как в одном из этих чатов все были из одной группы, а в другом – из другой). И это противоречит условию задачи. А это означает, что поменяв группу у Иннокентия мы не нарушим необходимое условие ни для какого другого чата из рассмотренных, а также выполним условие для чата А. А значит, после того, как мы просмотрим все чаты, условие будет выполнено для всех.

7 класс

7.1. *Соедините центры кругов с одинаковыми номерами (см. рисунок) десятью замкнутыми непересекающимися ломаными (каждая ломаная соединяет центры ровно двух кругов) так, что все звенья каждой ломаной параллельны сторонам квадрата, а концы звеньев лежат в отмеченных на рисунке точках — серединах соответствующих клеток.*



Решение. См. рисунок.



7.2. *Докажите, что число*

$$256^2 + 253 \cdot 254 \cdot 258 \cdot 259$$

является квадратом натурального числа.

Решение. Пусть $256 = A$. Тогда искомое число равно

$$A^2+(A-3)(A-2)(A+2)(A+3) = A^2+(A^2-4)(A^2-9) = A^2+A^4-13A^2+36 = A^4-12A^2+36 = (A^2-6)^2.$$

Значит, наше число равно $(256^2-6)^2$, ч. т. д.

7.3. *Расстояние между городами равно* 2024 *км. Путешественник преодолел это расстояние на велосипеде, проезжая каждый день целое число километров, не меньшее* 70, *но не большее* 80. *При этом в каждый чётный день пути он проезжал одинаковое расстояние; в каждый нечётный — тоже одинаковое, но другое. Сколько километров проезжал путешественник в чётный и сколько в нечётный день? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Пусть в чётный день путешественник проезжал x км, в нечётный — y км (числа x и y — целые), а всё путешествие длилось n дней. Тогда пройденный путешественником путь лежит в отрезке от $70n$ до $80n$. Из двойного неравенства $70n \leqslant 2024 \leqslant 80n$ с учётом того, что число n — натуральное, находим, что $26 \leqslant n \leqslant 28$. Возможны три случая.

Случай 1. $n = 26$. Тогда по условию $13x + 13y = 2024$. Это уравнение не имеет решений в целых числах (2024 не кратно 13).

Случай 2. $n = 27$. Тогда по условию $13x+13y+y = 2024$. Отсюда число $a = 2024-y$ кратно 13. Но $1944 = 2024 - 80 \leqslant a \leqslant 2024 - 70 = 1954$. На полученном промежутке единственное, кратное 13 число — это число 1950. Значит, $a = 1950$, $y = 74$, и $x + y = 150$, откуда $x = 76$.

Случай 3. $n = 28$. Тогда по условию $14x + 14y = 2024$. Это уравнение не имеет решений в целых числах (2024 не кратно 7).

Ответ. 74 километра в нечётный день и 76 километров в чётный.

7.4. *Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойством: вычеркнув некоторые его цифры (все, кроме двух) можно получить любое наперёд заданное двузначное число. Ответ обоснуйте.*

Решение. Каждая цифра $a \neq 0$ должна в числе присутствовать минимум дважды: иначе не получить число $\overline{aa}$. Хотя бы один 0 тоже есть (иначе не получить 10). Значит, в числе не меньше 19 цифр, и если их 19, то все цифры, кроме нуля, встречаются ровно два раза. Рассмотрим цифры, стоящие в девяти старших разрядах этого числа. Так как перед единственным в числе нулём должны быть все цифры от 1 до 9 хотя бы по разу, среди рассмотренных цифр нуля нет. Если среди них нет ещё какой-то цифры, скажем x, то по принципу Дирихле какая-то цифра y встречается дважды, а так как во всём числе цифр y ровно две, не получить числа $\overline{xy}$. Итак, среди первых девяти цифр числа встречаются по разу каждая из ненулевых цифр. Минимальное такое число — это число $M = 1\,234\,567\,890\,123\,456\,789$. Оно удовлетворяет условию задачи: для любого двузначного числа $\overline{xy}$ цифру десятков x оставим из первых девяти цифр числа M, цифру единиц y— из десяти последних.

Ответ. 1 234 567 890 123 456 789.

7.5. *Имеется* 14 *пробирок с кислотой; в первой ровно* 1 *мл, во второй —* 2 *мл в третьей —* 3 *мл и так до последней, в которой* 14 *мл кислоты. Также имеется пустая склянка ёмкостью* 100 *мл. Старший и младший лаборанты (старший начинает) по очереди выливают кислоту из пробирок в склянку; каждый в свой ход полностью опорожняет одну выбранную им пробирку (любую из ещё не опустевших). Тот из лаборантов, после хода которого склянка переполнится, берёт на себя ответственность за пролитую кислоту и будет делать уборку в лаборатории; разумеется, ни тот, ни другой лаборанты этого не* *хотят. Кто, старший или младший лаборант, может избежать участи уборщика, как бы его коллега этому не препятствовал? Ответ обоснуйте.*

Решение. Приведём стратегию за старшего лаборанта, позволяющую ему избежать уборки. Пусть первыми своими ходами он опорожняет пробирки ёмкостями 5 и меньше мл, а когда все они будут пустыми (это произойдёт не позже того, как будут опустошены 9 пробирок) действует произвольно. Тогда последней пробиркой останется пробирка с кислотой в количестве не менее 6 мл. В этот момент в склянке будет жидкости не больше, чем

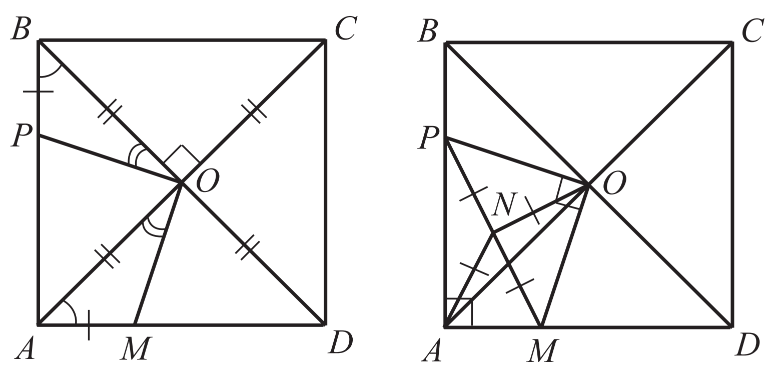
$$1 + 2 + \ldots + 14 - 6 = 99 \text{ мл},$$

то есть склянка ещё не переполнена. Сейчас ход младшего, он вынужден выливать в склянку оставшуюся кислоту, а она в склянку уже не входит.

Ответ: старший лаборант может избежать участи убираться в лаборатории.

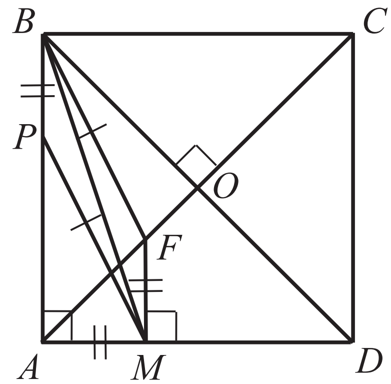
7.6. *На сторонах AB и DA квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки P и M так, что $BP = AM$. Докажите, что $2PM \geqslant AC$.*

Первое решение. Пусть точка O — центр квадрата (см. рисунок слева). Тогда $AC = 2AO$, а $\angle AOB = 90°$. Рассмотрим треугольники BPO и AMO. Они равны по двум сторонам и углу между ними: $BO = AO$ (половины диагоналей квадрата), $BP = AM$ (условие), $\angle PBO = \angle MDO$ (угол между диагональю квадрата и его стороной). Значит, $\angle BOP = \angle AOM$.



Тогда $\angle POM = \angle BOM - \angle BOP = \angle BOM - \angle AOM = \angle BOA = 90°$. Пусть точка N — середина отрезка PM (см. рисунок справа). Напомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, опущенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы. Из прямоугольного треугольника PAM имеем $AN = 0,5PM$, из прямоугольного треугольника POM — $ON = 0,5PM$. Значит, $PM = AN + ON \geqslant AO = \dfrac{1}{2}AC$, откуда и следует доказываемое неравенство.

Второе решение.



Пусть точка O — центр квадрата. Отметим точку F такую, что $MF = BP$ и $MF || BP$ — см. рисунок. Тогда треугольники BPM и BFM равны и $BF = PM$. Треугольник MAF — прямоугольный равнобедренный, значит $\angle MAF = 45°$, откуда точка F лежит на отрезке AO. В прямоугольном треугольнике BFO (если точки F и O различны) гипотенуза BF длиннее катета BO, а значит $2PM = 2BF > 2BO = BD = AC$, что и требовалось доказать. В случае, когда точки F и O совпадают, достигается равенство.

8 класс

8.1. *Заряда аккумулятора хватит, чтобы одна лампа горела ровно один час. К аккумулятору подключено 5 ламп, у каждой лампы есть свой выключатель. Если горит несколько ламп, то заряд распределяется между ними равномерно. Если лампа горела непрерывно в течение 10 минут, она начинает мигать. Как только заряд аккумулятора заканчивается, все лампы отключаются. Как отмерить ровно 22 минуты?*

Решение. Сначала включим любую лампу. Когда она замигает, включим ещё три лампы — прошло 10 минут. Когда эти три лампы замигают, включим оставшуюся лампу — прошло ещё 10 минут. Через 2 минуты все пять ламп погаснут, а мы отмерим 22 минуты.

8.2. *Максим загадал натуральное число n, сложил все натуральные числа от n до $n+10$ и получил число M. Антон взял эти же самые натуральные числа, перемножил их и получил число A. Оказалось, что последние четыре цифры M совпадают с последними четырьмя цифрами A. Какими могут быть эти четыре цифры? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.*

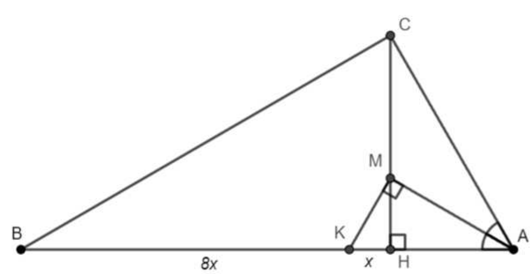
Решение. Число M равно $n + (n+1) + \ldots + (n+10) = 11n + 55 = 11(n+5)$. Среди любых пяти последовательных чисел есть число, кратное 5, а поскольку число A является произведением 11 подряд идущих чисел, оно делится на 25. По тем же соображениям число A делится на 2^4, то есть точно оканчивается на два нуля. Тогда M делится на 25, что возможно лишь когда $n+5$ кратно 25. Но тогда числа n и $n+10$ кратны пяти, откуда число A делится на 5^4, а значит оканчивается на 4 нуля.

Ответ. 4 нуля.

8.3. *В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведена высота CH. M – точка пересечения CH и биссектрисы угла BAC. Точка K на отрезке BH такова, что $MK \perp AM$ и $HK : BK = 1 : 8$. Найдите острые углы треугольника ABC.*

Решение. Как известно, квадрат высоты в прямоугольном треугольнике, проведённой к гипотенузе, равен произведению отрезков гипотенузы, то есть $CH^2 = BH \cdot AH$, $MH^2 = KH \cdot AH$. Отсюда

$$\frac{CH}{MH} = \sqrt{\frac{BH \cdot AH}{KH \cdot AH}} = \sqrt{\frac{BH}{KH}} = 3.$$



Тогда $\frac{CM}{MH} = 2$. По теореме о биссектрисе $\frac{CM}{MH} = \frac{AC}{AH} = 2$, следовательно, в прямоугольном треугольнике AHC катет AH лежит против угла в 30 градусов. Значит $\angle CAB = 60°$, $\angle CBA = 30°$.

Ответ. $\angle CAB = 60°$, $\angle CBA = 30°$.

8.4. *Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c таких, что число*

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}} + \frac{1}{c + \frac{1}{b+\frac{1}{a}}}$$

является целым.

Решение. Заметим, что обе дроби меньше единицы. Следовательно, если сумма равна целому числу, то оно равно единице. Приведём дроби к общему знаменателю и получим

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}} + \frac{1}{c + \frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{cb+1}{acb+a+c} + \frac{ab+1}{acb+a+c} = \frac{ba+bc+2}{acb+a+c} = 1.$$

Тогда $ba + bc + 2 = acb + a + c$.
Если $a = 1$, то $b + bc + 2 = bc + 1 + c \Rightarrow c = b + 1$. Аналогично, если $c = 1$, то $a = b + 1$.
Если $a > 1$ и $c > 1$, то $\dfrac{1}{a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}} < \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{c + \frac{1}{b+\frac{1}{a}}} < \dfrac{1}{2}$, а значит их сумма не может быть целой.

Ответ. Все тройки вида $(1, b, b+1), (b+1, b, 1)$, где $b \in \mathbb{N}$.

8.5. *Некоторый алфавит состоит из n букв. Строку S, составленную из букв этого алфавита, будем называть универсальной, если вычёркиванием букв из S можно получить любую перестановку алфавита. Какова наименьшая возможная длина универсальной строки, если:*

а) $n = 2$; *(1 балл)*

б) $n = 3$? *(3 балла)*

Существует ли для $n = 4$ универсальная строка длины:

в) 11; *(5 баллов)*

г) 12; *(3 балла)*

д) 13? *(2 балла)*

Решение. а) **Ответ.** 3. **Пример.** *aba*.
Доказательство корректности примера и оценка снизу оставляются читателю в качестве упражнения.

б) **Ответ.** 7. **Пример.** *abcabca*. Корректность примера проверяется вручную.
Оценка. Предположим, существует универсальная строка $S = x_1 x_2 \ldots x_m$ длины 6 или меньше. Возможны два случая:

I. Существует буква (без ограничения общности, c), которая встречается в строке S всего один раз. Тогда левее и правее этой буквы в строке S должны содержаться как подпоследовательности универсальные строки для алфавита $\{a, b\}$, а их длина не менее 3. Тогда длина S не менее $3 + 1 + 3 = 7$.

II. Каждая из букв a, b, c встречается в S ровно дважды. Возьмём наименьшее k, при котором строка $x_1 \ldots x_k$ содержит оба вхождения какой-то буквы — без ограничения общности, c. Тогда $x_k = c$. Тогда из строки $x_1 \ldots x_{k-1}$ должно быть возможно получить строки ab и ba, но для этого хотя бы одна из этих букв должна возникать среди $x_1, \ldots, x_{k-1}$ дважды. Противоречие с минимальностью k.

(в-д) **Пример на 12 букв.** $abcdabcadbca$.

Корректность примера. Обозначим $K = abc$, $L = abca$, $M = bca$. Тогда наш пример можно переписать в виде $KdLdM$. Заметим, что $KL = LM = abcabca$, что является универсальной строкой для алфавита $\{a, b, c\}$. Обозначим её V. Обозначим P произвольную перестановку алфавита $\{a, b, c, d\}$. Опишем, как получить P из нашего примера в зависимости от позиции в P буквы d.

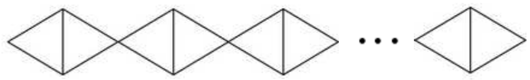
I. Если P имеет вид $dxyz$, то действуем так:
$KdLdM \to dLM = dV \to dxyz$.
II. Если $P = xdyz$, то
$KdLdM \to KdV \to xdyz$.
III. Если $P = xydz$, то
$KdLdM \to KLdM = VdM \to xydz$.
IV. Наконец, если $P = xyzd$, то
$KdLdM \to Vd \to xyzd$.

Оценка. Докажем, что универсальная строка состоит из не менее чем 12 букв. Обозначим $S = x_1 \ldots x_m$ произвольную универсальную строку для алфавита $\{a, b, c, d\}$. Возьмём наименьшее k, при котором строка $x_1 \ldots x_k$ содержит все четыре буквы алфавита. Без ограничения общности будем считать, что $x_k = d$. Обозначим $L = x_1 \ldots x_{k-1}$ и $R = x_{k+1} \ldots x_m$, то есть $S = LdR$. Отметим, что L не содержит букву d. Поскольку из строки S должны получаться в том числе все перестановки вида $dxyz$, строка R должна содержать как подпоследовательность универсальную строку для алфавита $\{a, b, c\}$, а её длина не менее 7. Таким образом, длина S не менее $4 + 7 = 11$, и равенство возможно только при условии, что R не содержит ни одной буквы d. Но поскольку S должна содержать все перестановки вида $xyzd$, строка L тоже должна содержать как подпоследовательность универсальную строку для алфавита $\{a, b, c\}$, откуда длина S оказывается уже не менее $7 + 1 + 7 = 15$. Противоречие.

Замечание. Найти универсальную строку из 13 букв гораздо проще. Например, подойдет строка $abcdabcdabcda$. Доказательство корректности этого примера оставим читателю в качестве несложного упражнения.

9 класс

9.1. *Сколькими способами можно раскрасить в красный, синий и зелёный цвета вершины указанного на рисунке графа таким образом, чтобы всякие две вершины, соединённые ребром, имели различные цвета? (Всего 2024 треугольника)*



Решение. Из условия задачи следует, что вершины любого треугольника должны быть покрашены в разные цвета. Возьмём любы два треугольника, имеющих общую сторону. Тогда третьи вершины этих треугольников (которые "смотрят" влево и вправо) покрашены в один цвет.Тогда все вершины, лежащие на среднем ряду, покрашены в один цвет. Этот цвет выбирается тремя способами. Все остальные пары вершин в треугольниках, которых 1012 штук, красятся в два цвета двумя способами независимо друг от друга. Тогда всего вариантов раскраски $3 \cdot 2^{1012}$.

Ответ. $3 \cdot 2^{1012}$.

9.2. *Сначала на доске было написано одно натуральное число $X < 2024$. Паша несколько раз проделывал следующую операцию: стирал с доски одно из имеющихся там чисел (назовём его A), а вместо него выписывал на доску два других числа: $2 \cdot A$ и $3 \cdot A$. Когда Паша закончил свои операции, сумма всех оставшихся на доске чисел равнялась 2024. Найдите все возможные значения X. Приводить примеры действий Паши не нужно.*

Решение. После любого количества операций каждое число на доске делится на X. При каждой операции сумма чисел увеличивается на $2 \cdot A + 3 \cdot A - A = 4 \cdot A$, где A делится на X. Следовательно, каждый раз сумма чисел увеличивается на число, кратное $4 \cdot X$. Тогда в конце получится $2024 = X + 4k \cdot X = X \cdot (4k + 1)$, где $k > 0$. Учитывая, что $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, единственным делителем вида $4k + 1$ является число $11 \cdot 23 = 253$. Следовательно, $2024 = 253 \cdot X$, откуда $X = 8$.

Ответ. $X = 8$.

Примечание. Паша смог получить сумму 2024 за 9 операций. Можете попробовать повторить его достижение.

9.3. *Действительные числа a, b, c таковы, что $a^2bc + ab^2c + abc^2 = 1$. Докажите, что*

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{bc}\right)^2 - 1.$$

Решение. Равенство из условия влечёт $a, b, c \neq 0$. В доказываемом неравенстве перенесём единицу в левую часть и умножим обе части на b^2c^2; тогда необходимо доказать неравенство

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant 1,$$

которое равносильно неравенству

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

Умножим обе части на 2 и перенесём всё влево. Получим

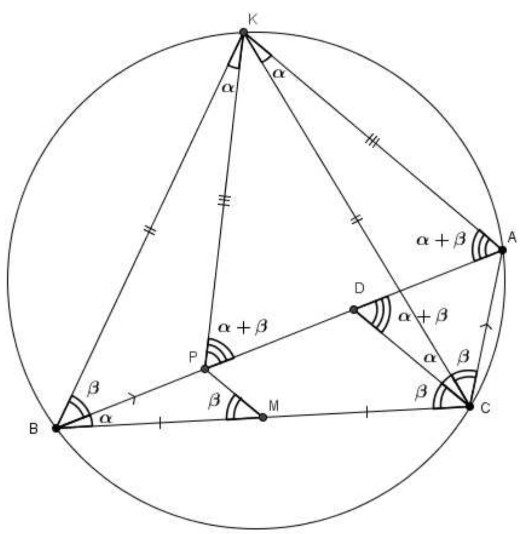
$$(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) + (a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2) =$$

$$= (ab - ac)^2 + (ab - bc)^2 + (ac - bc)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

9.4. *Точка K – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, точка M – середина стороны BC. На отрезке AB нашлась точка P такая, что $\angle BKP = \angle PBM$ и $\angle PMB = \angle PBK$. Докажите, что $AB = 3AC$.*

Решение. Обозначим $\angle BKP = \angle PBM = \alpha$, $\angle PMB = \angle PBK = \beta$. Так как K — середина дуги BAC, то $KB = KC$, а значит $\angle KCB = \angle KBC = \alpha + \beta$. Из вписанности $ACBK$ получаем $\angle KAB = \angle KBC = \alpha + \beta$, $\angle CKA = \angle CBA = \alpha$ и $\angle ACK = \angle ABK = \beta$. Угол KPA — внешний для треугольника KPB, поэтому $\angle KPA = \angle KBP + \angle BKP = \alpha + \beta$, из чего следует равнобедренность треугольника KAB. Получаем равенство треугольников BKP и CKA, откуда $BP = AC$.



Пусть точка D на отрезке AB такова, что $CD||MP$. Тогда MP — средняя линия в треугольнике BCD, откуда $BP = PD = AC$. С другой стороны, из параллельности следует $\angle BCD = \angle BMP = \beta$, откуда $\angle ACD = \angle KCB = \alpha + \beta$. Также $\angle CDA = \angle BCD + \angle CAD = \alpha + \beta$, как внешний угол треугольника BCD, значит $AC = AD$. С учётом всех доказанных равенств, получаем $AB = 3AC$.

9.5. *В каждую клетку доски $n \times m$ положили по одной монете. Монету, лежащую орлом вверх, разрешено забрать; при этом все монеты, лежащие в соседней по стороне* *клетке с забираемой, переворачиваются. Если действуя таким образом, возможно забрать все монеты с доски, раскладка монет называется разрешимой. Изначально орлом вверх лежит k монет.*

а) Докажите, что если $m = 1$ и k нечётное, то раскладка разрешима; *(3 балла)*

б) Докажите, что если числа m и k нечётные, то раскладка разрешима; *(4 баллов)*

в) Докажите, что если раскладка разрешима, то число $nm+n+m+k$ чётное; *(5 баллов)*

г) Обязательно ли раскладка разрешима, если число $nm + n + m + k$ чётное? *(2 балла)*

Решение. а) Докажем требуемое утверждение с помощью индукции по n.

Первым ходом заберем любую лежащую орлом вверх монету α такую, что слева (а следовательно, и справа) от α число орлов чётно. (Например, в качестве α можно выбрать самого левого орла.) После того, как мы заберем монету α, исходная раскладка фактически распадется на две меньших (возможно, пустых) раскладки, "левую" и "правую", с которыми далее можно будет работать независимо. Покажем, что каждая из этих раскладок либо пуста, либо содержит нечётное число орлов (и тогда разрешима по гипотезе индукции). Пусть "левая" раскладка непуста. Изначально среди ее монет было чётное число орлов, тогда после переворота одной монеты число орлов в "левой" раскладке становится нечётным. Аналогично с "правой".

б) Договоримся, что в нашей таблице n столбцов и m строк. Столбцы, в которых нечётное число орлов, будем называть *нечётными*; столбцы, в которых число орлов чётное — *чётными*. Легко видеть, что при нечётном k число нечётных столбцов нечётно.

Доказательство снова проведем с помощью индукции по n. Обозначим через А любой нечётный столбец, слева (а следовательно, и справа) от которого число нечётных столбцов чётно. Из пункта (а) следует, что нечётные столбцы разрешимы, то есть из столбца А можно забрать все монеты. Сделаем это. Отметим, что при этом мы ровно по одному разу перевернем все монеты из соседних с А столбцов. Число m нечётно, а это значит, соседние с А столбцы изменят свою чётность.

Снова исходная раскладка фактически разбивается на две, "левую" и "правую", с которыми далее можно работать независимо, при этом каждая из них либо пуста, либо содержит нечётное число нечётных столбцов, откуда по гипотезе индукции она разрешима.

в) Всякой (полной или частичной) раскладке монет на доске сопоставим тройку чисел (a, b, c), где a — общее число монет на доске, b — число пар монет, лежащих на соседних клетках, c — число монет, лежащих орлом вверх. В частности, изначальной раскладке соответствует тройка $(nm, 2nm - n - m, k)$, а пустой — тройка $(0, 0, 0)$. Мы покажем, что все монеты с доски можно забрать если и только если число $a + b + c$ чётное.

Посмотрим, что происходит с тройкой (a, b, c), когда мы забираем некоторую монету α. Обозначим новую тройку (a_1, b_1, c_1). Очевидно, $a_1 = a - 1$. Предположим, у монеты α было h соседних, из которых p лежали орлом вверх. Тогда $b_1 = b - h$ и $c_1 = c - 1 - p + (h - p) = c + h - 2p - 1$. Собирая всё вместе, получаем $a_1 + b_1 + c_1 = a + b + c - 2p - 2$, то есть числа $a + b + c$ и $a_1 + b_1 + c_1$ имеют одинаковую чётность.

Поскольку мы предполагаем, что из исходной раскладки возможно получить пустую, то одинаковую чётность должны иметь и соответствующие им суммы $nm + (2nm - n - m) + k$

и $0+0+0=0$, то есть число $3nm-n-m+k$ должно быть чётным. Остается заметить, что $3nm-n-m+k$ имеет ту же чётность, что и $nm+n+m+k$.

г) Нет, это не так. Рассмотрим следующую раскладку на доске 4×2:

$$\begin{array}{cccc} \text{Р} & \text{О} & \text{О} & \text{Р} \\ \text{Р} & \text{Р} & \text{Р} & \text{Р} \end{array}$$

Покажем, что она неразрешима. В силу симметрии неважно, какого именно орла мы попытаемся забрать в первую очередь. Допустим, левого. После этого раскладка примет вид

$$\begin{array}{cccc} \text{О} & . & \text{Р} & \text{Р} \\ \text{Р} & \text{О} & \text{Р} & \text{Р} \end{array}$$

Если теперь забрать нижнего орла, слева образуется изолированный столбец из двух орлов, не удовлетворяющий условию из пункта (в). Значит, мы вынуждены забирать верхнего орла:

$$\begin{array}{cccc} . & . & \text{Р} & \text{Р} \\ \text{О} & \text{О} & \text{Р} & \text{Р} \end{array}$$

Если заберём правого орла, слева образуется изолированная решка. Если же заберём левого, ни одного орла на доске не останется вообще. Таким образом, забрать все монеты невозможно.

10 класс

10.1. *Клуб "Медитация морем" собрал* 27 *роликов шума прибоя длительностью* 1, 2, ..., 27 *часов. Ролики были с архипелагов: Галапагосы, Занзибар и Кергелен. Средняя продолжительность ролика с Галапагосов —* 3 *часа, с Кергелен —* 18 *часов, а с Занзибара —* 15 *часов. Сколько роликов с каждого архипелага оказалось в распоряжении клуба "Медитация морем"? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Обозначим количество роликов с Кергелен, Занзибара, Галапагосов буквами k, z, g соответственно. Общая длительность в часах всех роликов равна $14 \cdot 27 = 18k + 15z + 3g$, откуда $126 = 6k + 5z + g$. Общее число роликов равно $27 = k + z + g$. Отсюда, вычитая $126 = 6k + 5z + g$ из $135 = 5k + 5z + 5g$, получаем $9 = 4g - k$, $k = 4g - 9$ и g хотя бы 3. Поскольку в среднем 3 часа длятся ролики с Галапагосов, то таких роликов длиной меньше 3 часов не больше двух, значит и длиной больше 3 часов — не больше двух. Отсюда, g в пределах от 3 до 5.

Случай $g = 3$: $k = 4g - 9 = 3$, $z = 27 - 3 - 3 = 21$. Пример: ролики с Галапагосов по $1, 2, 6$ часов; ролики с Кергелен по $3, 24, 27$ часов; остальные — с Занзибара.

Случай $g = 4$: $k = 4g - 9 = 7$, $z = 27 - 3 - 7 = 17$. Пример: ролики с Галапагосов по $1, 2, 3, 6$ часов; ролики с Кергелен по $15, 16, 17, 18, 19, 20, 21$ часов; остальные — с Занзибара.

Случай $g = 5$: $k = 4g - 9 = 11$, $z = 27 - 3 - 11 = 11$. Пример: ролики с Галапагосов по $1, 2, 3, 4, 5$ часов; ролики с Кергелен по $13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23$ часов; остальные — с Занзибара.

Ответ. Либо 3 с Галапагосов, 3 с Кергелен, 21 с Занзибара; либо 4 с Галапагосов, 7 с Кергелен, 17 с Занзибара; либо 5 с Галапагосов, 11 с Кергелен, 11 с Занзибара.

10.2. *Чапаев написал многочлен* 2024 *степени и Петька написал многочлен* 2024 *степени. Потом каждый из них возвел свой многочлен в квадрат, после чего эти квадраты вычли один из другого. Получился ненулевой многочлен. Верно ли, что его степень хотя бы* 2024*?*

Решение. Пусть у Чапаева многочлен Q, а у Петьки — P. Поскольку известно, что $P^2 - Q^2 = (P - Q)(P + Q)$ ненулевой, то и многочлены $P - Q$, $P + Q$ — такие же и их степени не ниже 0. Их разность $2Q$ имеет степень 2024. Ну тогда и степень хотя бы одного из них не меньше 2024, а их произведение имеет степень не меньше $0 + 2024$, то есть 2024.

10.3. *В начале игры "Стол Короля Артура" в зале находятся* 100 *рыцарей и* 500 *лжецов, а на сцене — двое ведущих и круглый стол на* 13 *персон. Каждый ведущий в свой ход выбирает свободное место и приглашает на него зрителя из зала. После того как все* 13 *мест за столом заняты, все сидящие кричат фразу «И рыцарь, и лжец — мой сосед», если, конечно, могут это сделать (рыцари всегда правдивы, лжецы – наоборот, а ведущие знают всех). Если фразу прокричат нечётное число сидящих за столом, выигрывает первый ведущий, а если чётное – второй. Кто из ведущих может выиграть независимо от игры соперника?*

Решение. Пусть осталось незанятым ровно одно место. Рассмотрим любое из трех мест: последнее незанятое или одно из его двух соседей. Заметим, сидящий на этом месте закричит, если на последнем месте окажется "лжец", в точности тогда, когда не закричит, если на последнем месте окажется "рыцарь". Значит суммируя крики с этих трех мест в случае приглашения "рыцаря", и в случае приглашения "лжеца", мы получим число 3. Ну тогда выбор на последнее место определяет четность числа криков с этих трех мест. Поскольку число криков среди остальных известно до этого выбора, выбирающий последним задает четность и общего числа криков. Последним выбирает первый ведущий, значит и выиграет он.

Ответ. Первый ведущий.

10.4. *Билл Кайфер собрался нарисовать равносторонний треугольник на бумаге в клеточку. Помогите ему, для чего при любых действительных ненулевых a и b решите систему*

$$a^2 + y^2 = b^2 + z^2 = (a - b)^2 + (y - z)^2,$$

то есть выразите y и z через a и b и докажите, что других решений нет.

Первое решение. Заметим, что система имеет решение (y, z) в точности тогда и только тогда, когда точки $O = (0, 0)$, $A = (a, y)$, $B = (b, z)$ образуют равносторонний треугольник. Тогда точка B — результат поворота точки A на угол $\pi/3 = 60^o$ по или против часовой стрелки. Заметим, что замена $(y, z) \to (-y, -z)$ меняет угол на противоположный. Следовательно достаточно разобрать случай, когда точка B — результат поворота точки A на угол $\pi/3 = 60^o$ против часовой стрелки.

Пусть α — угол, на который нужно повернуть ось OX против часовой стрелки, чтобы она прошла через A. Тогда $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2 + y^2}$, $\sin\alpha = y/\sqrt{a^2 + y^2}$. Теперь

$$b = \sqrt{b^2 + z^2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{a^2 + y^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}\sin\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}(a \mp \sqrt{3}y).$$

Отсюда имеем, что $\sqrt{3}y = a - 2b$. Аналогично,

$$z = \sqrt{b^2 + z^2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{a^2 + y^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}\cos\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a + y).$$

Подставляя выражение для $\sqrt{3}y = a - 2b$, получаем

$$\sqrt{3}z = \frac{3a}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = \frac{3a}{2} + \frac{a - 2b}{2} = 2a - b.$$

Итак, показано, что при повороте против часовой стрелки пара (y, z) обязана иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(a - 2b, 2a - b\Big).$$

Теперь проверим, что эта пара действительно образует решение, для чего подставим ее в утроенную систему: получим

$$3a^2 + |a - 2b|^2 = 3b^2 + (2a - b)^2 = 3(a - b)^2 + |a + b|^2.$$

Раскрывая скобки убеждаемся, что это действительно решение.

Второе решение. Усложним задачу, будем искать такие (y, z), чтобы $az - by$ был неотрицательным. Назовем четверку (a, b, y, z) правильной, если она удовлетворяет как системе из задачи, так и неравенству $az - by \geqslant 0$.

Заметим сначала, что $a = b = 0$ дает ровно одну правильную четверку. Действительно, подставляя имеем $y^2 = z^2 = y^2 - 2yz + z^2$, откуда $(y - 2z)y = 0 = (z - 2y)z$, то есть $y = z = 0$.

Кроме того, если (a_1, b_1, y_1, z_1) и (a_2, b_2, y_2, z_2) правильны, то и их сумма $(a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2, y = y_1 + y_2, z = z_1 + z_2)$ такая же. Действительно, поскольку эти они правильны, то их тройки точек $O = (0, 0)$, $A_i = (a, y)$, $B_i = (b_i, z_i)$ образуют равносторонние треугольники, причем поворот от OA_i к OB_i на угол $\pi/3$ идет против часовой стрелки. Тогда такова и тройка $O = (0, 0)$, $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2, y_1 + y_2)$, $B_1 + B_2 = (b_1 + b_2, z_1 + z_2)$, откуда следует, что тройка$(a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2, y = y_1 + y_2, z = z_1 + z_2)$ решает систему, а поворот от OA_i к OB_i на угол $\pi/3$ также идет против часовой стрелки, что дает $az - by \geqslant 0$.

Далее, легко видеть, что если правильную (a, b, y, z) умножить на любое число, то она останется правильной. Тогда, если (a_1, b_1, y_1, z_1) и (a_2, b_2, y_2, z_2) правильны, то и четверки вида $(a = Ua_1 + Va_2, b = Ub_1 + Vb_2, y = Uy_1 + Vy_2, z = Uz_1 + Vz_2)$ с любыми U, V тоже правильны.

Теперь найдем для $a = 1, b = 0$ правильную четверку:

$$\left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

Поскольку, как легко заметить, (a, b, y, z) правильная в точности тогда, когда такова и $(b, a, -z, -y)$, то правильной будет и

$$\left(0, 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Пусть a, b произвольны, заметим, что $a = U \cdot 0 + V \cdot 1$,$b = U \cdot 0 + V \cdot 1$ при $U = b$, $V = a$. Тогда правильной будет и

$$\left(a, b, \frac{-2b + a}{\sqrt{3}}, \frac{2a - b}{\sqrt{3}}\right).$$

Покажем, что других правильных четверок для a, b нет. Пусть какая-то (a, b, y', z') правильная. Тогда таковой будет и ее разность с найденной, то есть

$$\left(0, 0, y' - \frac{-2b + a}{\sqrt{3}}, z' - \frac{2a - b}{\sqrt{3}} - z'\right),$$

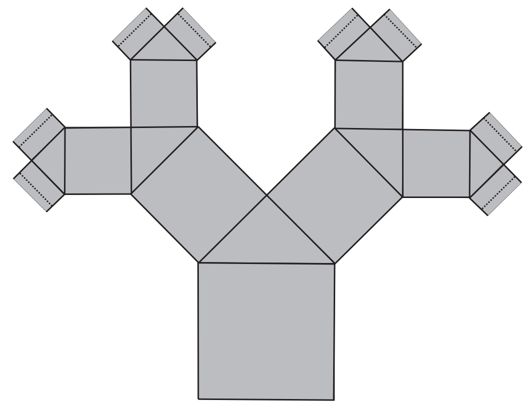
но с $(a = 0, b = 0)$ правильна только нулевая четверка, откуда следует единственность.

Итак, пусть (a, b, y, z) удовлетворяют системе, тогда или эта четверка правильная, или правильна $(a, b, -y, -z)$. Подставляя найденный для правильной четверки ответ, получаем:

Ответ. Ровно два решения $(y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(a - 2b, 2a - b\Big)$ и $(y, z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(a - 2b, 2a - b\Big)$.

10.5. *Зенон нарисовал квадрат со стороной* 1*, затем, на одной из его сторон, как на гипотенузе, построил прямоугольный равнобедренный треугольник.*

На каждом последующем шаге, на всех катетах вновь полученных равнобедренных прямоугольных треугольников он строил по еще одному квадрату, у каждого из которых, на противоположной стороне, как на гипотенузе, рисовал новый равнобедренный прямоугольный треугольник. После того, как эта процедура была повторена бесконечное число раз, он получил узор Φ (на рисунке справа нарисована лишь часть узора).



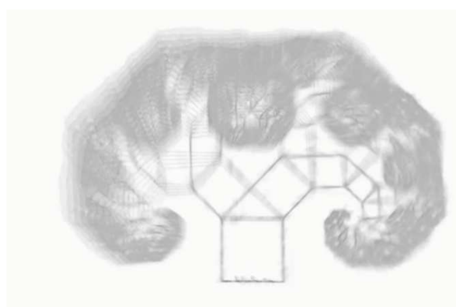
а) Можно ли совершить бесконечное число оборотов, пройдя по линиям узора Φ маршрут конечной длины?(2 балла)

б) Можно ли из любой точки узора Φ в любую другую его точку проложить проходящий по линиям узора маршрут длины не больше 100? (4 балла)

в) Если закрасить в узоре Φ все построенные квадраты и равнобедренные прямоугольные треугольники, то конечна ли закрашенная площадь? (2 балла)

г) Конечна ли суммарная длина всех линий узора Φ? (6 баллов)

Решение.



Под k-м уровнем понимаем все 2^k квадратов, построенные на k-м шаге на базе катетов треугольников, построенных на квадратах предыдущего уровня; при этом нулевым уровнем считается исходный квадрат.

а) Будем переходить от квадрата к каждому следующему меньшему (пусть правому меньшему). Это будет давать поворот на $\pi/4$ по часовой стрелке, уменьшая очередную сторону квадрата в $2^{-1/2}$ раз. Поскольку размеры квадратов уменьшаются с единицы до нуля, при этом совершается бесконечное число поворотов в одну и ту же сторону, на один и тот же ненулевой угол, а значит и бесконечное число оборотов. При этом длина маршрута равна $1 + 2^{-1/2} + \ldots + 2^{n/2} + \ldots + (1 - 2^{-1/2})^{-1} = 2 + \sqrt{2}$, значит конечна. Маршрут построен.

б) Покажем сначала, что от любой точки на сторонах исходного квадрата до любой точки узора можно построить маршрут длины меньше 50. Выберем точку с узора. Поскольку все стороны любого треугольника являются частью того или иного квадрата, то выбранная точка узора находится на стороне какого-то квадрата, пусть с длиной $r = 2^{-n/2} < 1$ при каком-то n. Тогда этот квадрат относится к n-му уровню. Чтобы пересечь k-й уровень достаточно пройти сторону длиной $2^{-k/2}$. Тогда чтобы пересечь все уровни от 0-го до n-го, нужно пройти не более $1+2^{-1/2}+\ldots+2^{-n/2} \leqslant (1-2^{-1/2})^{-1} = 2+\sqrt{2} < 4$. С учетом того, что нужно еще попасть в выбранные точки на изначальном квадрате и выбранную точку узора (на стороне $r < 1$), на это требуются дополнительные пути длиной не более 2 и $2r \leqslant \sqrt{2}$ соответственно, то общая длина маршрута не превосходит $4+2\sqrt{2} < 7 < 50$. Тем более это так, если обе точки на исходном квадрате.

Поскольку маршрута длиной не более 7 достаточно чтобы пройти из любой точки узора до любой точки исходного квадрата, то из произвольной точки в произвольную можно пройти, построив маршрут через исходный квадрат, длина этого маршрута не превосходит 14.

в) Выберем какую-нибудь точку самого большого, изначального, квадрата. По предыдущему пункту любая точка узора удалена от нее не больше чем на 14. Значит весь узор окажется внутри круга с таким радиусом, а площадь закрашенной части плоскости не превосходит площади круга, равной 296π.

г) Рассмотрим произвольный квадрат. Два квадрата, построенные над ним, имеют суммарный периметр ровно в $\sqrt{2}$ раз больше. Поэтому с каждым следующим уровнем сумма периметров всех квадратов этого уровня увеличивается в $\sqrt{2}$ раз. В частности, сумма периметров всех квадратов уровня k равна $2^{2+k/2}$, а значит неограниченно возрастает.

Если бы отрезки квадратов друг на друга не накладывались, то общая длина всех линий, как сумма всех периметров всех квадратов, была бы бесконечна. Но поскольку прямоугольный треугольник равнобедренный, то квадраты чётных уровней параллельны друг другу, исключить наложение нельзя, а значит суммарная длина линий узора может оказаться меньше суммы периметров квадратов.

Покажем, тем не менее, что длина линий узора, образуемой квадратами чётных уровней, бесконечна (тогда бесконечна она и у всего узора). Действительно, на $2n$-м уровне сумма периметров всех квадратов равна $4 \cdot 2^n$, а сумма периметров всех квадратов на чётных уровнях до уровня $2n-2$ включительно равна $4(1+\ldots+2^{n-1}) = 4(2^n-1)$. Ну тогда среди сторон всех квадратов $2n$-го уровня хотя бы какие-то отрезки длиной 4 не будут перекрываться любыми квадратами предыдущих чётных уровней. Итак, на каждом чётном уровне придется проводить отрезки, суммарной длиной не меньше 4. Поскольку уровней бесконечно много, длина линий узора, образуемого квадратами чётных уровней, бесконечна. Тогда тем более она бесконечна у всего узора.

Ответ. а) да б) да в) да г) нет.

11 класс

11.1. *Сколькими способами можно раскрасить в красный, синий и зелёный цвета вершины указанного на рисунке графа таким образом, чтобы всякие две вершины, соединённые ребром, имели различные цвета? (Всего* 2024 *треугольника и* 1012 *квадратов)*

Решение. Из условия задачи следует, что вершины любого треугольника должны быть покрашены в разные цвета. Все вершины в среднем горизонтальном ряду можно покрасить в один из трёх цветов. Количество таких вершин на 1 больше количества квадратов, т.е. 1013 штук. Теперь покрасим вершины квадрата. Цвета двух левых вершин квадрата определяются однозначно (отличные от вершины треугольника), а расположений этих цветов — два. Цвета правых вершин квадрата тоже определяются однозначно, причём либо это те же два цвета, что и слева, либо только один из цветов слева, и один цвет новый. В обоих случаях только одно расположение этих цветов соответствует условию. Таким образом, вершины каждого квадрата можно покрасить ровно 2 способами. Тогда всего вариантов покраски $3^{1013} \cdot 2^{1012}$.

Ответ. $3^{1013} \cdot 2^{1012}$ способов.

11.2. *В клетки таблицы* 3×3 *вписаны цифры* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *каждая по одному разу. В этой таблице можно прочесть три трёхзначных числа, читая слева направо, и ещё три трёхзначных числа, читая сверху вниз. Может ли оказаться так, что эти* 6 *чисел в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию?*

Решение. Пусть цифры вписаны так, как показано на рисунке, образовывая числа $\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}, \overline{adg}, \overline{beh}, \overline{cfi}$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Предположим, что арифметическая прогрессия составлена, и разность прогрессии равна X. Заметим, что разность $\overline{cfi} - \overline{ghi}$ делится на 10. Если эти числа не являются первым и последним в прогрессии, то среди остальных найдётся пара чисел с такой же разностью. Но среди шести чисел нет другой пары, оканчивающейся на одинаковые цифры. Если же $\overline{cfi}$ и $\overline{ghi}$ — первое и последнее число, то их разность равна $5X$, поэтому X — чётно. Тогда все шесть чисел должны быть одинаковой чётности, то есть все последние цифры c, f, g, h, i — нечётны (нечётных цифр ровно 5), а остальные цифры a, b, d, e — чётны (чётных цифр ровно 4). При этом числа, начинающиеся с чётных цифр, в прогрессии идут подряд, т.к. первое и шестое место уже заняты. Среди этих чисел есть и числа в одной сотне, $\overline{abc}$ и $\overline{adg}$, из чего следует, что $X < 100$, и последовательные числа из разных сотен с чётной цифрой в старшем разряде, из чего следует, что $X > 100$. Одновременно эти неравенства не могут быть выполнены. Противоречие. Таким образом, числа не могут образовывать арифметическую прогрессию.

Ответ. Не может.

11.3. *Докажите, что для всех чисел x, y, где $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, выполнено неравенство*

$$\cos x - \cos y < \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

Решение. Распишем разность косинусов:

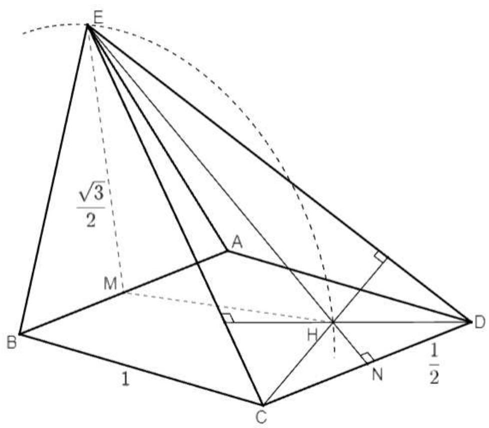
$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}.$$

Отметим, что длина дуги, опирающейся на хорду, больше хорды, то есть при любом положительном α выполнено неравенство $\sin\alpha < \alpha$. Применяя неравенство к каждому множителю в правой части равенства выше (с учётом $x < y$), имеем

$$\cos x - \cos y < 2 \cdot \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y-x}{2} = \frac{y^2 - x^2}{2}.$$

11.4. *Дан квадрат $ABCD$ и точка E, не лежащая в плоскости квадрата, такая, что ABE — равносторонний треугольник. Высоты треугольника CDE пересекаются в точке H. Докажите, что треугольник ABH — равносторонний.*

Решение. Пусть точки M и N — середины AB и CD соответственно. Плоскость α, проходящая через M, перпендикулярная AB, будет содержать точки E и N (равноудалены от A и B). Более того, точки C и D симметричны относительно α, потому $CE = DE$, и в равнобедренном треугольнике CDE медиана EN является высотой. Следовательно, точка H также лежит в плоскости α, а треугольник ABH — тоже равнобедренный.
Теперь докажем обратное утверждение: если ABH — равносторонний, то H — точка пересечения высот (при условии, что H — точка на прямой NE). Пусть сторона квадрата равна 1. Треугольники ABE и ABH равны, т.е. в плоскости α точки E и H лежат на окружности радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$ с центром в точке M. Степень точки N относительно этой окружности равна $NM^2 - ME^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = NH \cdot NE$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике CDE оказалось $\frac{1}{4} = ND^2 = NH \cdot NE$, откуда $\frac{ND}{NE} = \frac{NH}{ND}$. Таким образом, треугольники DNE и DNH подобны, $\angle NDH = \angle DEN = 90° - \angle EDC = 90° - \angle DCE$, следовательно, $DH \perp CE$, и точка H — точка пересечения высот. Утверждение доказано (вычисления одинаковы в случае остроугольного и тупоугольного треугольника CDE).
Осталось заметить, что у треугольника только одна точка пересечения высот, потому и прямое утверждение задачи верно.



11.5. *Пусть $N \geqslant 4$ — натуральное число. Число $S(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ назовём приближением числа $\sqrt{N}$, если x, y — натуральные числа, а разность $\sqrt{N} - S(x, y)$ неотрицательна. Среди всех приближений $\sqrt{N}$ назовём наилучшим приближением то, при котором разность $\sqrt{N} - S(x, y)$ минимальна. Наилучшее приближение $\sqrt{N}$ обозначим за S_N. Например,*

$$S_5 = \sqrt{1} + \sqrt{1},$$
$$S_6 = \sqrt{1} + \sqrt{2},$$
$$S_{15} = \sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

а) Докажите, что $\sqrt{N} \geqslant S_N > \sqrt{N} - 1$. *(2 балла)*

б) Пусть $N = 2k$ — чётное число. Найдите наилучшее приближение $S(x, y)$ числа $\sqrt{N}$ при ограничении $x + y = k$. *(4 балла)*

в) Докажите, если $N = 2k$, где k — нечётное простое число, то $S_N \neq \sqrt{N}$. *(3 балла)*

г) Докажите, что при простом нечётном k полученное в пункте (б) приближение на самом деле является S_N (даже без ограничений на сумму $x + y$). *(5 баллов)*

Решение. а) Заметим, что в полуинтервале $(\sqrt{N} - 1; \sqrt{N}]$ есть некоторое натуральное число M, причём $M \geqslant 2$. Тогда найдутся натуральные числа a, b такие, что $a + b = M$. Следовательно, приближение $S(a^2, b^2) = a + b = M$ попадает в указанный полуинтервал. Но тогда и наилучшее приближение S_N тоже попадает, так как $\sqrt{N} \geqslant S_N \geqslant S(a^2, b^2) = M > \sqrt{N} - 1$.

б) Переобозначим $x = \frac{k}{2} - z, y = \frac{k}{2} + z$. Тогда

$$(S(x, y))^2 = (\sqrt{\frac{k}{2} - z} - \sqrt{\frac{k}{2} + z})^2 = k + 2\sqrt{\frac{k^2}{4} - z^2},$$

что является убывающей функцией при $z > 0$. Следовательно, наилучшим приближением будет то, при котором z минимально. При чётном k можно взять $z = 0$, при нечётном k можно взять $z = \frac{1}{2}$. Более того,

$$k + 2\sqrt{\frac{k^2}{4} - z^2} \leqslant k + 2\sqrt{\frac{k^2}{4}} = 2k = N,$$

поэтому найденное выражение $S(x,y)$ действительно является приближением $\sqrt{N}$.

Ответ. При чётном k наилучшим окажется $S(\frac{k}{2},\frac{k}{2})$. При нечётном k наилучшим окажется $S(\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2})$.

Примечание. В частности, в этом пункте было доказано довольно известное утверждение: *«При фиксированной сумме $a+b$ сумма $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ максимальна при $a=b$»*.

в) Будем рассуждать от противного. Пусть оказалось, что $\sqrt{2k}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Тогда $2k=x+y+2\sqrt{xy}$, откуда следует, что xy — точный квадрат. Переобозначив $x=am^2, y=an^2$, получим $2k=am^2+an^2+2\sqrt{a^2m^2n^2}=a(m^2+n^2+2mn)=a(m+n)^2$. Но поскольку $m+n\neq 1$, а $k\neq 2$, число $2k$ не может быть разложено на множители в виде $a(m+n)^2$.

г) Будем рассуждать от противного. Пусть нашлась пара чисел x,y такая, что

$$\sqrt{2k}>\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{\frac{k-1}{2}}+\sqrt{\frac{k+1}{2}}$$

Первое неравенство — строгое, это следует из пункта (с). Сначала заметим, что $x+y>k$, так как при меньшей сумме, т.е. $x+y\leqslant k-1$, даже наилучшее по пункту (б) приближение не удовлетворяет неравенству, ибо $S(x,y)\leqslant S(\frac{k-1}{2},\frac{k-1}{2})<S(\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2})$. Далее, возведя неравенство в квадрат, получим

$$2k>x+y+\sqrt{4xy}>k+\sqrt{k^2-1}$$

$$k+\sqrt{k^2}>x+y+\sqrt{4xy}>k+\sqrt{k^2-1}$$

Подставив $x+y=k+t$, где по доказанному выше $t>0$, получим

$$\sqrt{k^2}>t+\sqrt{4xy}>\sqrt{k^2-1}.$$

Так как в левой части — целое число, а между $4xy$ и $4xy+1$ нет точных квадратов (да и вообще нет целых чисел), то можно записать неравенство в виде

$$\sqrt{k^2}\geqslant t+\sqrt{4xy+1}>t+\sqrt{4xy}>\sqrt{k^2-1}.$$

Но тогда

$$\sqrt{k^2}-\sqrt{k^2-1}>\sqrt{4xy+1}-\sqrt{4xy},$$

что невозможно, ибо $k^2>4xy+1$, а функция $f(a)=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ — убывающая (это можно проверить, взяв производную). Противоречие. Следовательно, не существует приближения более близкого к $\sqrt{N}$, чем полученное в пункте (б).

Примечание. Если снять ограничения с k, то могут существовать лучшие приближения, чем в пункте (б). Например, при $k=9$ приближение $\sqrt{18}>\sqrt{4}+\sqrt{5}$ не наилучшее, так как $\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.