XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

11 класс

11.1. Решите уравнение

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

11.2. Дан тетраэдр. Обязательно ли найдутся ли четыре параллельные плоскости, проходящие каждая через свою вершину тетраэдра так, чтобы расстояния между любыми соседними плоскостями были одинаковыми?

11.3. Даны различные простые числа p, q, r. Произведение pqr нацело делится на $p+q+r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ является квадратом натурального числа.

11.4. Нюша имеет 2022 монеты, а Бараш — 2023. Нюша и Бараш бросают все свои монеты одновременно и считают сколько орлов выпало у каждого. Выигрывает тот из них, у кого окажется орлов больше, а в случае равенства выигрывает Нюша. С какой вероятностью выигрывает Нюша?

11.5. Крош, узнав корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, изобрел «золотую систему счисления Кроша», систему счисления с основанием $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Лосяш отметил, что фактически Крош находит разложения положительных чисел на суммы каких-то различных целых степеней числа φ. Например, в этой системе счисления запись $11,1$ соответствует числу

$$1 + \sqrt{5} = \varphi^1 + \varphi^0 + \varphi^{-1}.$$

Лосяш также заявил, что если число имеет разложение, то у него их бесконечно много и всегда можно обойтись разложением, в котором нет пары соседних степеней φ; само же разложение есть у всех положительных чисел $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$, где m, n — целые и одной четности. Докажите, что Лосяш прав, для чего:

а) Найдите хотя бы пять различных разложений числа 1. (2 балла)

б) Докажите, что если число можно разложить в такую сумму, то можно и в сумму, в которой нет пары соседних степеней φ. (2 балла)

в) Докажите, что если a разложимо, то и $a+1$ разложимо. (3 балла)

г) Докажите, что сумма и произведение разложимых чисел также разложимы. (2 балла)

д) Докажите, что если для каких-то целых m, n одной четности число $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ положительно, то это число разложимо. (5 баллов)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023
10 класс

10.1. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $x + y > 2$.

10.2. Рассказывая об однокруговом турнире по шахматам (каждый участник сыграл с каждым по одной партии), комментатор сказал следующее: «В турнире участвовали 15 человек; победитель турнира набрал вдвое больше очков, чем участник, занявший последнее место. Остальные 13 участников набрали одно и тоже промежуточное (между первым и последним) количество очков, поделив, таким образом, места с 2-го по 14-е.» Докажите, что комментатор хоть раз, да ошибся. (В шахматной партии победитель получает одно очко, проигравший — ноль очков, а в случае ничьей оба участника получают по пол-очка.)

10.3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ на большей боковой стороне CD нашлась такая точка T, что окружности с диаметрами CT и TD касаются боковой стороны AB каждая. Обозначим точки касания стороны AB окружностями как X и Y. Может ли оказаться, что $AY = BX$? Ответ обоснуйте.

10.4. Квадрат 7×7 разрезали без остатка (по линиям сетки) на трёхклеточные уголки и маленькие квадраты размера 2×2. Докажите, что маленький квадрат получился ровно один.

10.5. В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4 : 1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3 : 1$, на победу третьей — $1 : 1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых.

а) Буратино собирается поставить на всех трёх лошадей, но так, чтобы вне зависимости от исхода скачек получить по крайней мере на 2 золотых больше, чем поставил. Подскажите Буратино сколько золотых на какую лошадь поставить, если общая сумма поставленных денег равна 50 золотым. (3 балла)

б) Пьеро желает поставить в сумме ровно 25 золотых, чтобы получить гарантированно хотя бы на 1 золотой больше. Сможет ли он это сделать? (2 балла)

в) Папа Карло намерен сделать такие ставки, чтобы гарантированно получить на 5 золотых больше, чем он поставил. Какую наименьшую сумму денег для этого он должен иметь? (5 баллов)

г) Карабас-Барабас хочет так сделать ставки, чтобы гарантированно получить денег хотя бы на 6% больше, чем поставлено. Сможет ли он это сделать? Денег у Карабаса-Барабаса куры не клюют. (4 балла)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

9 класс

9.1. Найдите наименьшее шестизначное число, кратное 11, у которого сумма первой и четвёртой цифр равна сумме второй и пятой цифр и равна сумме третьей и шестой цифр.

9.2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BIC касается прямой AB. Докажите, что эта окружность касается прямой AC.

9.3. Петя назвал Васе два ненулевых действительных числа x, y и попросил вычислить два новых числа: $x + \frac{1}{y^2}$ и $y^2 + \frac{1}{x}$. Вася всё перепутал и посчитал значения выражений $x^2 + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x^2}$. Тем не менее, результаты получились теми же, только в обратном порядке. Докажите, что Петя назвал Васе два одинаковых числа.

9.4. Даны набор $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ и набор $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}\}$, являющийся перестановкой набора S. Известно, что для любых $1 \leqslant n, m \leqslant 2022$ выражение $a_n + a_m$ делится нацело на НОД$(n; m)$. Найдите число возможных наборов A.

9.5. Забор Тома Сойера состоит из n досок. Бен Роджерс и Билли Фишер по очереди красят по одной доске, причём Бен красит в красный цвет, а Билли — в синий. Начинает Бен. Если кто-то из мальчиков покрасит две соседние доски, то немедленно будет выгнан купаться, а оставшийся получит серединку от яблока; если же забор полностью окрашен, а такой ситуации так и не случилось, Том оставляет серединку от яблока себе.

а) Докажите, что если $n = 2022$, то Билли Фишер может избежать участи отправиться купаться. (3 балла)

Имеет ли кто-то из мальчишек стратегию, которая позволит ему гарантированно получить серединку от яблока, если:

б) n — нечётное число, большее 10; (5 баллов)

в) n — чётное число, большее 10? (6 баллов)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

8 класс

8.1. Расставьте в таблице 3×3 натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы каждое число было использовано по одному разу, а сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце являлась простым числом.

8.2. Могут ли числа a, b, c (не обязательное целые) в каком-то порядке совпадать с числами $a + 1, b^2 + 2, c^3 + 3$?

8.3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка O. На отрезках AO, BO, CO, DO построили квадраты OAA_1A_2, OBB_1B_2, OCC_1C_2, ODD_1D_2 (все вершины названы в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.

8.4. Сколькими способами можно расставить по кругу все натуральные числа от 1 до $2n$ так, чтобы каждое число было делителем суммы двух соседних с ним чисел? (Способы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются одинаковыми)

8.5. На доске написано положительное рациональное число. Для любых уже написанных чисел a и b (в том числе совпадающих) разрешается выписать на доску числа $a + 2b$, ab^2 и a/b^2. Всегда ли получится (возможно, в несколько действий):

а) выписать число 1, если изначально написано одно нечётное натуральное число? (2 балла)

б) выписать число 1, если изначально написано одно чётное натуральное число? (2 балла)

в) выписать число 1, если изначально написано одно число? (3 балла)

г) выписать число 2, если изначально написано одно число? (3 балла)

д) Существует ли такое x, что если на доске написано x, то получится выписать и любое другое положительное рациональное число? (4 балла)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

7 класс

7.1. Паша записал в тетради равенство, состоящее из целых чисел и знаков арифметических действий. Затем в выражении в левой части равенства он зашифровал каждую цифру и знак действия буквой, заменив одинаковые цифры или знаки одинаковыми буквами, а разные — разными. У него получилось равенство:

$$\text{ВУЗАКАДЕМ} = 2023.$$

Придумайте хотя бы один вариант выражения, которое мог зашифровать Паша. Арифметическими действиями могут быть сложение, вычитание, умножение и деление. Скобки использовать нельзя.

7.2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD пересекаются внутри четырёхугольника. Эти диагонали делят углы четырёхугольника на две меньшие части, т. е. образуются 8 углов, по два в каждой из вершин четырёхугольника. Могут ли 3 из этих 8 углов оказаться тупыми?

7.3. В ряд стоят 55 коробок, пронумерованных по порядку числами от 1 до 55. В каждой коробке лежит не более 10 шаров, причём в любых двух соседних коробках количество шаров отличается ровно на 1. Известно, что в коробках с номерами 1, 4, 7, 10, …, 55 лежит суммарно 181 шар. Какое наименьшее количество шаров может быть суммарно во всех 55 коробках?

7.4. На доске записаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?

7.5. Паша играет в компьютерную игру. Игра происходит на бесконечном клетчатом поле. В каждой клетке находится одно из двух: либо сокровище, либо натуральное число. Число показывает расстояние до ближайшего сокровища по клеткам (если до сокровища нужно сделать A шагов по вертикали и B шагов по горизонтали, то в клетке написано число $A + B$). За один ход Паша может узнать содержимое одной клетки. Цель игры — найти хотя бы одно сокровище.

а) Паша вскрыл три клетки, идущие подряд по горизонтали. В каждой из них оказалось число 5. Какое наименьшее число ходов нужно ещё сделать Паше, чтобы наверняка найти сокровище? (2 балла)

б) Паша вскрыл какие-то три клетки, и в них оказались числа. Могло ли так случиться, что по этой информации Паша может гарантированно найти сокровище следующим ходом? (3 балла)

в) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит некоторого фиксированного $K \geqslant 3$. Может ли Паша наверняка найти сокровище, сделав не более $K + 3$ ходов? (4 балла)

г) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит 2023. Хватит ли Паше 20 ходов, чтобы наверняка найти сокровище? (5 баллов)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

6 класс

6.1. Можно ли из четырёх пятиклеточных крестов и четырёх четырёхклеточных уголков сложить фигуру, периметр которой меньше 25 клеток? Фигуры нельзя накладывать друг на друга.

6.2. Математики Андрей, Борис и Виктор решали задачи олимпиады. Сначала несколько задач решил Андрей, потом треть от оставшихся задач решил Борис. После этого осталась нерешённой треть задач, которую дорешал Виктор. Какую часть всех задач решил Андрей?

6.3. В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4:1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3:1$, на победу третьей — $1:1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых. У Буратино есть ровно 20 монет. Может ли он сделать такие ставки, чтобы при любом исходе скачек уйти хотя бы с 21 монетой?

6.4. Из пункта А в пункт Б выехали Иван на тракторе и Пётр на «Мерседесе». Пётр доехал до пункта Б, подождал 10 минут и, позвонив Ивану, узнал, что тот проехал только треть пути и сейчас проезжает мимо кафе. Пётр выехал к нему. Не заметив Ивана, он доехал до кафе и, потратив полчаса на перекус, поехал в пункт Б. В итоге Пётр доехал до пункта Б одновременно с Иваном. Сколько времени потратил Иван на весь путь, если и он, и Пётр ехали с постоянными скоростями?

6.5. 2023 игрока в Майнкрафт собрались и поделились на два сервера. Раз в минуту кто-то из них огорчался тому, что на его сервере игроков больше, чем на другом, и переходил играть туда. За 2023 минуты каждый игрок сменил сервер только один раз. Сколько людей могло изначально собраться на первом сервере? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

6.6 На доске записаны все натуральные числа от 1 до 50 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

5 класс

5.1. Евгений укладывает плитку на полу своей гостиной размером 12 на 16 метров. Он планирует разместить квадратные плитки размером 1м $\times$ 1м вдоль границы комнаты, а остальную часть пола выложить квадратными плитками размером 2м $\times$ 2м. Сколько всего плиток ему понадобится?

5.2. Ивановы Иван и Ирина, Мишины Михаил и Мария, Петровы Пётр и Полина хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести могут Иван, Михаил и Полина. Мужчина не может оставаться на берегу или в лодке наедине с чужой женой. Если семья целиком оказывается на другом берегу, они сразу уходят. Как им всем переправиться на другой берег?

5.3. В десяти коробках лежат мячики: 1, 3, 5, $\ldots$, 19 мячиков. Два друга Пётр и Василий по очереди берут по одному мячику из какой-то коробки. Первым берёт мячик Пётр. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то двух коробках станет одинаковое количество мячиков (быть моежт, нулевое). Кто из них может выиграть вне зависимости от ходов соперника?

5.4. Даниил с Пашей ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока Даниил управлял машиной, Паше было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Паша заметил, что ровно в полдень они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y — некоторые цифры), в $12:42$ — мимо столба с числом YX, а в час дня — мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?

5.5. На окружности отмечены какие-то 11 красных точек, а внутри окружности — какие-то 11 жёлтых точек. Докажите, что если никакая жёлтая точка не лежит на отрезке, соединяющем две красные, то можно выбрать 5 красных точек так, чтобы они образовывали пятиугольник, внутри которого не более 4 жёлтых точек.