XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

5 класс

5.1. Евгений укладывает плитку на полу своей гостиной размером 12 на 16 метров. Он планирует разместить квадратные плитки размером 1м $\times$ 1м вдоль границы комнаты, а остальную часть пола выложить квадратными плитками размером 2м $\times$ 2м. Сколько всего плиток ему понадобится?

5.2. Ивановы Иван и Ирина, Мишины Михаил и Мария, Петровы Пётр и Полина хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести могут Иван, Михаил и Полина. Мужчина не может оставаться на берегу или в лодке наедине с чужой женой. Если семья целиком оказывается на другом берегу, они сразу уходят. Как им всем переправиться на другой берег?

5.3. В десяти коробках лежат мячики: 1, 3, 5, $\ldots$, 19 мячиков. Два друга Пётр и Василий по очереди берут по одному мячику из какой-то коробки. Первым берёт мячик Пётр. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то двух коробках станет одинаковое количество мячиков (быть может, нулевое). Кто из них может выиграть вне зависимости от ходов соперника?

5.4. Даниил с Пашей ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока Даниил управлял машиной, Паше было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Паша заметил, что ровно в полдень они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y — некоторые цифры), в $12:42$ — мимо столба с числом YX, а в час дня — мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?

5.5. На окружности отмечены какие-то 11 красных точек, а внутри окружности — какие-то 11 жёлтых точек. Докажите, что если никакая жёлтая точка не лежит на отрезке, соединяющем две красные, то можно выбрать 5 красных точек так, чтобы они образовывали пятиугольник, внутри которого не более 4 жёлтых точек.

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

6 класс

6.1. Можно ли из четырёх пятиклеточных крестов и четырёх четырёхклеточных уголков сложить фигуру, периметр которой меньше 25 клеток? Фигуры нельзя накладывать друг на друга.

6.2. Математики Андрей, Борис и Виктор решали задачи олимпиады. Сначала несколько задач решил Андрей, потом треть от оставшихся задач решил Борис. После этого осталась нерешённой треть задач, которую дорешал Виктор. Какую часть всех задач решил Андрей?

6.3. В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4:1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3:1$, на победу третьей — $1:1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых. У Буратино есть ровно 20 монет. Может ли он сделать такие ставки, чтобы при любом исходе скачек уйти хотя бы с 21 монетой?

6.4. Из пункта А в пункт Б выехали Иван на тракторе и Пётр на «Мерседесе». Пётр доехал до пункта Б, подождал 10 минут и, позвонив Ивану, узнал, что тот проехал только треть пути и сейчас проезжает мимо кафе. Пётр выехал к нему. Не заметив Ивана, он доехал до кафе и, потратив полчаса на перекус, поехал в пункт Б. В итоге Пётр доехал до пункта Б одновременно с Иваном. Сколько времени потратил Иван на весь путь, если и он, и Пётр ехали с постоянными скоростями?

6.5. 2023 игрока в Майнкрафт собрались и поделились на два сервера. Раз в минуту кто-то из них огорчался тому, что на его сервере игроков больше, чем на другом, и переходил играть туда. За 2023 минуты каждый игрок сменил сервер только один раз. Сколько людей могло изначально собраться на первом сервере? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

6.6 На доске записаны все натуральные числа от 1 до 50 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

7 класс

7.1. Паша записал в тетради равенство, состоящее из целых чисел и знаков арифметических действий. Затем в выражении в левой части равенства он зашифровал каждую цифру и знак действия буквой, заменив одинаковые цифры или знаки одинаковыми буквами, а разные — разными. У него получилось равенство:

$$\text{ВУЗАКАДЕМ} = 2023.$$

Придумайте хотя бы один вариант выражения, которое мог зашифровать Паша. Арифметическими действиями могут быть сложение, вычитание, умножение и деление. Скобки использовать нельзя.

7.2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD пересекаются внутри четырёхугольника. Эти диагонали делят углы четырёхугольника на две меньшие части, т. е. образуются 8 углов, по два в каждой из вершин четырёхугольника. Могут ли 3 из этих 8 углов оказаться тупыми?

7.3. В ряд стоят 55 коробок, пронумерованных по порядку числами от 1 до 55. В каждой коробке лежит не более 10 шаров, причём в любых двух соседних коробках количество шаров отличается ровно на 1. Известно, что в коробках с номерами 1, 4, 7, 10, …, 55 лежит суммарно 181 шар. Какое наименьшее количество шаров может быть суммарно во всех 55 коробках?

7.4. На доске записаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?

7.5. Паша играет в компьютерную игру. Игра происходит на бесконечном клетчатом поле. В каждой клетке находится одно из двух: либо сокровище, либо натуральное число. Число показывает расстояние до ближайшего сокровища по клеткам (если до сокровища нужно сделать A шагов по вертикали и B шагов по горизонтали, то в клетке написано число $A + B$). За один ход Паша может узнать содержимое одной клетки. Цель игры — найти хотя бы одно сокровище.

а) Паша вскрыл три клетки, идущие подряд по горизонтали. В каждой из них оказалось число 5. Какое наименьшее число ходов нужно ещё сделать Паше, чтобы наверняка найти сокровище? (2 балла)

б) Паша вскрыл какие-то три клетки, и в них оказались числа. Могло ли так случиться, что по этой информации Паша может гарантированно найти сокровище следующим ходом? (3 балла)

в) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит некоторого фиксированного $K \geqslant 3$. Может ли Паша наверняка найти сокровище, сделав не более $K + 3$ ходов? (4 балла)

г) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит 2023. Хватит ли Паше 20 ходов, чтобы наверняка найти сокровище? (5 баллов)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

8 класс

8.1. Расставьте в таблице 3×3 натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы каждое число было использовано по одному разу, а сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце являлась простым числом.

8.2. Могут ли числа a, b, c (не обязательное целые) в каком-то порядке совпадать с числами $a+1, b^2+2, c^3+3$?

8.3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка O. На отрезках AO, BO, CO, DO построили квадраты OAA_1A_2, OBB_1B_2, OCC_1C_2, ODD_1D_2 (все вершины названы в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.

8.4. Сколькими способами можно расставить по кругу все натуральные числа от 1 до $2n$ так, чтобы каждое число было делителем суммы двух соседних с ним чисел? (Способы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются одинаковыми)

8.5. На доске написано положительное рациональное число. Для любых уже написанных чисел a и b (в том числе совпадающих) разрешается выписать на доску числа $a+2b$, ab^2 и a/b^2. Всегда ли получится (возможно, в несколько действий):

а) выписать число 1, если изначально написано одно нечётное натуральное число? (2 балла)

б) выписать число 1, если изначально написано одно чётное натуральное число? (2 балла)

в) выписать число 1, если изначально написано одно число? (3 балла)

г) выписать число 2, если изначально написано одно число? (3 балла)

д) Существует ли такое x, что если на доске написано x, то получится выписать и любое другое положительное рациональное число? (4 балла)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

9 класс

9.1. Найдите наименьшее шестизначное число, кратное 11, у которого сумма первой и четвёртой цифр равна сумме второй и пятой цифр и равна сумме третьей и шестой цифр.

9.2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BIC касается прямой AB. Докажите, что эта окружность касается прямой AC.

9.3. Петя назвал Васе два ненулевых действительных числа x, y и попросил вычислить два новых числа: $x + \frac{1}{y^2}$ и $y^2 + \frac{1}{x}$. Вася всё перепутал и посчитал значения выражений $x^2 + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x^2}$. Тем не менее, результаты получились теми же, только в обратном порядке. Докажите, что Петя назвал Васе два одинаковых числа.

9.4. Даны набор $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ и набор $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}\}$, являющийся перестановкой набора S. Известно, что для любых $1 \leqslant n, m \leqslant 2022$ выражение $a_n + a_m$ делится нацело на НОД$(n; m)$. Найдите число возможных наборов A.

9.5. Забор Тома Сойера состоит из n досок. Бен Роджерс и Билли Фишер по очереди красят по одной доске, причём Бен красит в красный цвет, а Билли — в синий. Начинает Бен. Если кто-то из мальчиков покрасит две соседние доски, то немедленно будет выгнан купаться, а оставшийся получит серединку от яблока; если же забор полностью окрашен, а такой ситуации так и не случилось, Том оставляет серединку от яблока себе.

а) Докажите, что если $n = 2022$, то Билли Фишер может избежать участи отправиться купаться. (3 балла)

Имеет ли кто-то из мальчишек стратегию, которая позволит ему гарантированно получить серединку от яблока, если:

б) n — нечётное число, большее 10; (5 баллов)

в) n — чётное число, большее 10? (6 баллов)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

10 класс

10.1. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $x + y > 2$.

10.2. Рассказывая об однокруговом турнире по шахматам (каждый участник сыграл с каждым по одной партии), комментатор сказал следующее: «В турнире участвовали 15 человек; победитель турнира набрал вдвое больше очков, чем участник, занявший последнее место. Остальные 13 участников набрали одно и тоже промежуточное (между первым и последним) количество очков, поделив, таким образом, места с 2-го по 14-е.» Докажите, что комментатор хоть раз, да ошибся. (В шахматной партии победитель получает одно очко, проигравший — ноль очков, а в случае ничьей оба участника получают по пол-очка.)

10.3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ на большей боковой стороне CD нашлась такая точка T, что окружности с диаметрами CT и TD касаются боковой стороны AB каждая. Обозначим точки касания стороны AB окружностями как X и Y. Может ли оказаться, что $AY = BX$? Ответ обоснуйте.

10.4. Квадрат 7×7 разрезали без остатка (по линиям сетки) на трёхклеточные уголки и маленькие квадраты размера 2×2. Докажите, что маленький квадрат получился ровно один.

10.5. В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4:1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3:1$, на победу третьей — $1:1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых.

а) Буратино собирается поставить на всех трёх лошадей, но так, чтобы вне зависимости от исхода скачек получить по крайней мере на 2 золотых больше, чем поставил. Подскажите Буратино сколько золотых на какую лошадь поставить, если общая сумма поставленных денег равна 50 золотым. (3 балла)

б) Пьеро желает поставить в сумме ровно 25 золотых, чтобы получить гарантированно хотя бы на 1 золотой больше. Сможет ли он это сделать? (2 балла)

в) Папа Карло намерен сделать такие ставки, чтобы гарантированно получить на 5 золотых больше, чем он поставил. Какую наименьшую сумму денег для этого он должен иметь? (5 баллов)

г) Карабас-Барабас хочет так сделать ставки, чтобы гарантированно получить денег хотя бы на 6% больше, чем поставлено. Сможет ли он это сделать? Денег у Карабаса-Барабаса куры не клюют. (4 балла)

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

11 класс

11.1. Решите уравнение

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

11.2. Дан тетраэдр. Обязательно ли найдутся ли четыре параллельные плоскости, проходящие каждая через свою вершину тетраэдра так, чтобы расстояния между любыми соседними плоскостями были одинаковыми?

11.3. Даны различные простые числа p, q, r. Произведение pqr нацело делится на $p+q+r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ является квадратом натурального числа.

11.4. Нюша имеет 2022 монеты, а Бараш — 2023. Нюша и Бараш бросают все свои монеты одновременно и считают сколько орлов выпало у каждого. Выигрывает тот из них, у кого окажется орлов больше, а в случае равенства выигрывает Нюша. С какой вероятностью выигрывает Нюша?

11.5. Крош, узнав корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, изобрел «золотую систему счисления Кроша», систему счисления с основанием $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Лосяш отметил, что фактически Крош находит разложения положительных чисел на суммы каких-то различных целых степеней числа φ. Например, в этой системе счисления запись $11,1$ соответствует числу

$$1 + \sqrt{5} = \varphi^1 + \varphi^0 + \varphi^{-1}.$$

Лосяш также заявил, что если число имеет разложение, то у него их бесконечно много и всегда можно обойтись разложением, в котором нет пары соседних степеней φ; само же разложение есть у всех положительных чисел $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$, где m, n — целые и одной четности. Докажите, что Лосяш прав, для чего:

а) Найдите хотя бы пять различных разложений числа 1. (2 балла)

б) Докажите, что если число можно разложить в такую сумму, то можно и в сумму, в которой нет пары соседних степеней φ. (2 балла)

в) Докажите, что если a разложимо, то и $a+1$ разложимо. (3 балла)

г) Докажите, что сумма и произведение разложимых чисел также разложимы. (2 балла)

д) Докажите, что если для каких-то целых m, n одной четности число $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ положительно, то это число разложимо. (5 баллов)

РЕШЕНИЯ

5 класс

5.1. *Евгений укладывает плитку на полу своей гостиной размером 12 на 16 метров. Он планирует разместить квадратные плитки размером* $1м \times 1м$ *вдоль границы комнаты, а остальную часть пола выложить квадратными плитками размером* $2м \times 2м$. *Сколько всего плиток ему понадобится?*

Решение. Отступим от границ гостиной на 1 м. У нас останется прямоугольник размера 10×14, который потребуется покрыть плитками 2×2. Площадь прямоугольника 140, площадь одной плитки 4, значит, понадобится $140 : 4 = 35$ больших плиток. Площадь граничной полосы равна $12 \cdot 16 - 140 = 52$ и она должна быть покрыта плитками площади 1. Значит, потребуется 52 малые плитки. Общее количество плиток равно $35 + 52 = 87$.

Ответ. 87 плиток.

5.2. *Ивановы Иван и Ирина, Мишины Михаил и Мария, Петровы Пётр и Полина хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести могут Иван, Михаил и Полина. Мужчина не может оставаться на берегу или в лодке наедине с чужой женой. Если семья целиком оказывается на другом берегу, они сразу уходят. Как им всем переправиться на другой берег?*

Решение. Обозначим мужчин большими буквами И, М, П и их женщин и, м, п. Тогда грести могут И, М, п. Покажем схематично процесс переправы:

$$(1)\,\text{и, м, п, П} \xrightarrow{\text{И, М}} (2)$$

$$(1)\,\text{и, м, п, П} \xleftarrow{\text{И}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{и, И, м} \xrightarrow{\text{п, П}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{и, И, м} \xleftarrow{\text{М}} (2)$$

$$(1)\,\text{и, м} \xrightarrow{\text{И, М}} (2)$$

$$(1)\,\text{и, м} \xleftarrow{\text{И}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{м} \xrightarrow{\text{и, И}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{м} \xleftarrow{\text{М}} (2)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{м, М}} (2)$$

5.3. *В десяти коробках лежат мячики:* $1, 3, 5, \ldots, 19$ *мячиков. Два друга Пётр и Василий по очереди берут по одному мячику из какой-то коробки. Первым берёт мячик Пётр. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то двух коробках станет* *одинаковое количество мячиков (быть может, нулевое). Кто из них может выиграть вне зависимости от ходов соперника?*

Решение. Пётр выиграет, если будет делать любые допустимые ходы, то есть такие ходы, после которых не возникнет пары коробок с одинаковым числом мячиков. Докажем это. Рассмотрим ситуацию (назовём её *критической*, когда в коробках разное число мячей, но любое взятие мячика приведёт к ситуации, когда в каких-то двух коробках мячей окажется поровну. Ясно, что тогда, во-первых, одна из коробок пустая (иначе можно взять мячик из коробки с наименьшим числом мячиков), во-вторых, для каждой непустой коробки A есть коробка в которой мячиков ровно на 1 меньше (иначе можно взять мячик из A). Итак, в критической ситуации в коробках лежит соответственно 0, 1, $dots$, 9 мячиков, всего 45 штук. Изначально мячиков было чётное число (сумма десяти нечётных чисел), стало нечётным. Значит было взято нечётное число мячиков, и сейчас очередь брать Василия. Он и проигрывает. Ещё отметим, что до этого момента каждый из игроков в свою очередь мог сделать ход, не приводящий его к поражению (выше показано, что критическая ситуация единственна), значит, до этого момента Пётр точно мог не проиграть.

Ответ. Выиграет Пётр.

5.4. *Даниил с Пашей ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока Даниил управлял машиной, Паше было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Паша заметил, что ровно в полдень они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y — некоторые цифры), в $12:42$ — мимо столба с числом YX, а в час дня — мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?*

Решение. Способ 1. За 42 минуты с 12:00 до 12:42 машина проехала не более 100 км, а за оставшиеся 18 минут ещё меньше (в $42/18 = 7/3$) раза. Значит, до столба с числом 200 машина к 13:00 не добралась. Тогда $X = 1$. Тогда, вне зависимости от числа Y, с 12 до часу машина преодолела путь равный 90 км, и её скорость равна 90 км/ч. Остаётся показать, что при такой скорости описанная ситуация возможна, то есть, что условие задачи непротиворечиво. В самом деле: за 42 минуты (что равно 7/10 часа) машина прошла 63 км. И при $Y = 8$ (кстати, такое Y единственно) она как раз окажется напротив столба с номером $63 + 18 = 81$. За оставшиеся до часу дня 18 минут (3/10 часа) машина проедет ещё 27 км и окажется напротив столба с числом $81 + 2 = 108$.

Способ 2. От столба с числом $YX = 10Y + X$ до числа с числом $XY = 10X + Y$ ровно $(10Y + X) - (10X + Y) = 9(Y - X)$ км. Аналогично между столбами с числами XOY и YX ровно $9(11X - Y)$ км. Постоянная скорость машины означает, что участки пройденного ей пути пропорциональны времени, затраченного на их преодоление. Иными словами имеем уравнение $\frac{9(Y-X)}{9(11X-Y)} = \frac{42}{60-42}$. После решения полученной пропорции, получим равенство $Y = 8X$. В цифрах это равенство имеет два решения: $X = Y = 0$, что невозможно, так как первая цифра на километровом столбе от нуля отлична, и $X = 1$, $Y = 8$, что и имело место быть. Тогда за час машина прошла $108 - 18 = 90$ км. Это и есть её скорость.

Ответ. 90 км/ч.

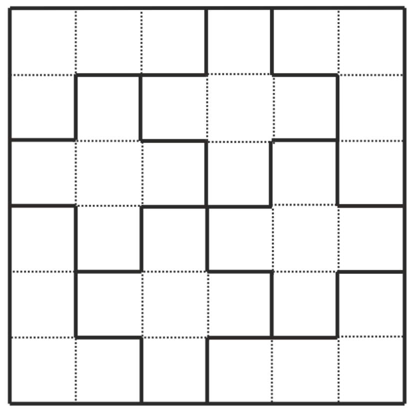
5.5. *На окружности отмечены какие-то 11 красных точек, а внутри окружности — какие-то 11 жёлтых точек. Докажите, что если никакая жёлтая точка не лежит на отрезке, соединяющем две красные, то можно выбрать 5 красных точек так, чтобы они образовывали пятиугольник, внутри которого не более 4 жёлтых точек.*

Решение. Занумеруем красные точки последовательно, двигаясь по часовой стрелке, натуральными числами от 1 до 11. И рассмотрим три таких пятиугольника (указаны только номера их их вершин — красных точек): 1) 1, 2, 3, 4, 5, 2) 1, 5, 6, 7, 8, 1, 8, 9, 10, 11. Легко видеть, что внутренние области пятиугольников общих точек не имеют, поэтому по принципу Дирихле в какой-то из них не более 4 жёлтых, ч. т. д.

6 класс

6.1. *Можно ли из четырёх пятиклеточных крестов и четырёх четырёхклеточных уголков сложить фигуру, периметр которой меньше 25 клеток? Фигуры нельзя накладывать друг на друга.*

Решение. Можно, например, так:



К решению задачи 6.1

Ответ. Можно.

6.2. *Математики Андрей, Борис и Виктор решали задачи олимпиады. Сначала несколько задач решил Андрей, потом треть от оставшихся задач решил Борис. После этого осталась нерешённой треть задач, которую дорешал Виктор. Какую часть всех задач решил Андрей?*

Решение. Когда Андрей отрешал несколько задач, то Борис прорешал третью часть остатка, а Виктор, соответственно, две трети остатка. Если это, по условию, третья часть всех задач, умножив задачи Виктора на три мы получаем, что удвоенный остаток после Андрея это все задачи олимпиады. То есть, после Андрея осталась половина задач олимпиады. То есть, Андрей отрешал половину всех задач олимпиады.

Ответ. $1/2$.

6.3. *В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади* $4:1$ *(т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй —* $3:1$*, на победу третьей —* $1:1$*. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых. У Буратино есть ровно* 20 *монет. Может ли он сделать такие ставки, чтобы при любом исходе скачек уйти хотя бы с* 21 *монетой?*

Решение. Чтобы добиться успеха Буратино может действовать так: одну монету оставит себе, а из оставшихся 19 монет поставит 4 монеты на первую лошадь, 5 монет на вторую лошадь и 10 монет – на третью. В случае успеха каждой из лошадей (с учётом коэффициента) он получит по 20 монет, и вместе с одной монетой, которую Буратино не ставил, это сделает возможным его выигрыш.

Ответ. Может.

6.4. *Из пункта А в пункт Б выехали Иван на тракторе и Пётр на «Мерседесе». Пётр доехал до пункта Б, подождал 10 минут и, позвонив Ивану, узнал, что тот проехал только треть пути и сейчас проезжает мимо кафе. Пётр выехал к нему. Не заметив Ивана, он доехал до кафе и, потратив полчаса на перекус, поехал в пункт Б. В итоге Пётр доехал до пункта Б одновременно с Иваном. Сколько времени потратил Иван на весь путь, если и он, и Пётр ехали с постоянными скоростями?*

Решение. Из того, что Иван проехал треть пути к тому моменту, когда Пётр проехал его целиком и подождал 10 минут, можно сделать вывод, что когда Иван доедет до пункта Б, Пётр мог три раза проехать маршрут и подождать полчаса. Вместо этого он проехал маршрут $1+2/3+2/3 = 7/3$ раз и подождал 40 минут. Получается, что для Петра $2/3$ пути в первом соотношении равносильны 10 минутам ожидания во втором. Из этого можно сделать вывод, что весь путь Пётр проезжает за 15 минут, а треть пути Ивана это 25 минут. Соответственно, весь путь Ивана – это 75 минут.

Ответ. 1 час и 15 минут.

6.5. *2023 игрока в Майнкрафт собрались и поделились на два сервера. Раз в минуту кто-то из них огорчался тому, что на его сервере игроков больше, чем на другом, и переходил играть туда. За 2023 минуты каждый игрок сменил сервер только один раз. Сколько людей могло изначально собраться на первом сервере? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Назовём серверы А и Б. Если какой-то из серверов в начале пуст, то после 1012 перехода он окажется наибольшим, а все, кто ещё не менял сервер – на другом. То есть, оба сервера в начале не пусты. Заметим, что в момент, когда игрок, начинавший играть на сервере А, переходит на сервер Б, на этом сервере собралось не больше, чем 1011 игроков. С этого момента сервер Б не может набрать больше, чем 1012 игроков, потому что в момент, когда он это делает, на нём начинает играть больше человек, чем на сервере А, и оттуда игроки уходить в данный момент больше не могут. Значит, в конце на сервере Б играют не больше 1012 человек, а на сервере А не меньше, чем 1011. Аналогично получаем, что в конце игры на сервере А не больше, чем 1012 человек, а на сервере Б – не меньше 1011. Получается, что единственный возможный случай – это когда в конце игры на одном из серверов собирается 1011 человек, а на другом – 1012. Но каждый участник менял сервер ровно один раз, а это значит, что ситуация начала совпадает с ситуацией конца. То есть, в начале на одном из серверов 1011 человек, а на другом – 1012.

Ответ. 1011 человек или 1012 человек.

6.6 *На доске записаны все натуральные числа от 1 до 50 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?*

Решение. Оценка. Заметим, что мы не сможем выбрать число 1 ни с каким другим числом в пару, чтобы их НОД был больше одного, поэтому один точно останется на доске. Также заметим, что на доске точно останутся числа 29, 31, 37, 41, 43 и 47. Они простые и больше половины от 50. А значит, все числа, которые на них делятся не написаны на доске. Также на доске должно остаться хотя бы одно число из последней выбранной Васей пары. Как видим, получается уже 8 чисел, которые точно должны остаться на доске.

Пример. Покажем, как стереть с доски все нечётные числа, кроме тех, что описаны в оценке. Сначала сотрём с доски все нечётные составные числа, поставив их в пару с одним из простых делителей этого числа. Затем сотрём все нечётные простые, меньшие 25, поставив их в пару с удвоенным этим числом (оно будет чётным, а потому не будет стёрто к этому моменту). Затем сотрём все чётные числа, поставив их в пару с двойкой. Заметим, что осталось действительно 8 чисел: 1, 2, 29, 31, 37, 41, 43 и 47.

Ответ. 8 чисел.

7 класс

7.1. *Паша записал в тетради равенство, состоящее из целых чисел и знаков арифметических действий. Затем в выражении в левой части равенства он зашифровал каждую цифру и знак действия буквой, заменив одинаковые цифры или знаки одинаковыми буквами, а разные — разными. У него получилось равенство:*

$$ВУЗАКАДЕМ = 2023.$$

Придумайте хотя бы один вариант выражения, которое мог зашифровать Паша. Арифметическими действиями могут быть сложение, вычитание, умножение и деление. Скобки использовать нельзя.

Решение. Есть много способов получить требуемое равенство. Приведём некоторые из них (для полного решения задачи достаточно только одного):

$$0 + 1 \times 7 \times 289$$

$$2065 + 5 - 47$$

$$1963 + 3 \times 20$$

7.2. *Дан четырёхугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD пересекаются внутри четырёхугольника. Эти диагонали делят углы четырёхугольника на две меньшие части, т. е. образуются 8 углов, по два в каждой из вершин четырёхугольника. Могут ли 3 из этих 8 углов оказаться тупыми?*

Решение. Пусть диагонали четырёхугольника пересекаются в точке O. В точке O сходятся две пары вертикальных углов. Два из них — не меньше $90°$, поэтому даже если образованные ими треугольники — тупоугольные, то тупой угол находится не в вершине четырёхугольника. А в двух других треугольниках в сумме не больше двух тупых углов, поэтому 3 из 8 углов не могут быть тупыми.

Ответ. Не могут.

7.3. *В ряд стоят 55 коробок, пронумерованных по порядку числами от 1 до 55. В каждой коробке лежит не более 10 шаров, причём в любых двух соседних коробках количество шаров отличается ровно на 1. Известно, что в коробках с номерами* $1, 4, 7, 10, \ldots, 55$ *лежит суммарно 181 шар. Какое наименьшее количество шаров может быть суммарно во всех 55 коробках?*

Решение. Так как количество шаров в двух соседних коробках отличается на 1, то чётность этого количества всегда отличается. Следовательно, на протяжении всего ряда коробок чётность чередуется — в коробках с номерами разной чётности количество шаров тоже имеет разную чётность. Разобьём коробки на пары: 1 с 4, 7 с 10, 13 с 16, ..., 49 с 52 — всего 9 пар. В каждой паре одно из количеств чётно, другое нечётно. Поэтому в двух коробках одной пары не более $10+9 = 19$ шаров. Тогда в 55 коробке не менее $181 - 19 \cdot 9 = 10$ шаров. Следовательно, условие задачи может быть выполнено лишь в одной ситуации: в 55-й коробке ровно 10 шаров, а в указанных парах — ровно по 19. Более того, коробки с 10 и 9 шаров в парах чередуются. Тогда заметим, что каждый промежуток между указанными коробками может быть лишь двух видов: 9 и 10 шаров либо 8 и 9 шаров. Во втором случае шаров меньше. Считаем минимальное количество шаров: $181 + 18 \cdot (8 + 9) = 487$.

Ответ. 487 шаров.

7.4. *На доске записаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?*

Решение. Оценка. Для того, чтобы стереть число, Вася должен найти два числа, в разложении которых на простые множители найдётся хотя бы одно одинаковое простое число. Но тогда не могут быть стёрты единица (нет простых чисел вообще) и простые числа, большие 50 (нет второго числа, которое бы на него делилось). Простые числа, большие 50, это $53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$ — всего 10 чисел. Далее, при стирании одного из чисел в паре, содержащей одинаковое простое число, другое остаётся на доске. Поэтому при последнем стирании должно остаться хотя бы одно число, содержащее простой делитель, меньший 50. Итого не менее 12 чисел останется на доске.

Пример. Вася может действовать следующим образом. Для каждого простого числа, меньшего 50, на доске есть и удвоенное. Поэтому, выбирая простое p в паре с $2p$, Вася может стереть простые числа от 11 до 47, оставив временно 2, 3, 5 и 7. Каждое составное число до 100 включительно имеет простой делитель, меньший 10, поэтому Вася может стереть все составные числа, кроме 6, 10 и 14. Затем Вася может удалить 3, 5 и 7 так же, как и остальные простые числа. Наконец, с помощью числа 2 удалить 6, 10 и 14. В итоге на доске останутся числа $1, 2, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$.

Ответ. 12 чисел.

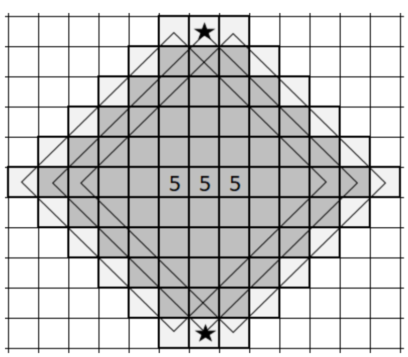
7.5. *Паша играет в компьютерную игру. Игра происходит на бесконечном клетчатом поле. В каждой клетке находится одно из двух: либо сокровище, либо натуральное число. Число показывает расстояние до ближайшего сокровища по клеткам (если до сокровища нужно сделать A шагов по вертикали и B шагов по горизонтали, то в клетке написано число $A + B$). За один ход Паша может узнать содержимое одной клетки. Цель игры — найти хотя бы одно сокровище.*

а) Паша вскрыл три клетки, идущие подряд по горизонтали. В каждой из них оказалось число 5. Какое наименьшее число ходов нужно ещё сделать Паше, чтобы наверняка найти сокровище? *(2 балла)*

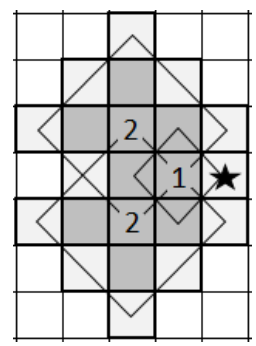
б) Паша вскрыл какие-то три клетки, и в них оказались числа. Могло ли так случиться, что по этой информации Паша может гарантированно найти сокровище следующим ходом? *(3 балла)* *в) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит некоторого фиксированного $K \geqslant 3$. Может ли Паша наверняка найти сокровище, сделав не более $K+3$ ходов?* *(4 балла)*

г) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит 2023. Хватит ли Паше 20 ходов, чтобы наверняка найти сокровище? *(5 баллов)*

Решение. а) Заметим, что если Паша находит в клетке некоторое число K, то обязательно хотя бы одно сокровище расположено в клетках по периметру квадрата, повёрнутого на $45°$ относительно сторон линий сетки, вдоль стороны которого ровно $K+1$ клетка. При этом внутри такого квадрата ни одного сокровища быть не может. Построим такие квадраты вокруг найденных Пашей пятёрок. Сокровище, относящееся к центральной пятёрке, может быть расположено только выше или ниже неё на расстоянии 5 клеток, так как остальные клетки периметра будут накрыты другими квадратами. Но одна из этих клеток может не содержать сокровища, поэтому Паше не хватит одного хода, чтобы гарантированно его найти. Для других пятёрок или клеток вне квадратов тоже нельзя однозначно указать, где лежит сокровище. Поэтому Паше нужно хотя бы два хода (эти ходы отмечены звёздочкой на рисунке).



К решению задачи 7.5а

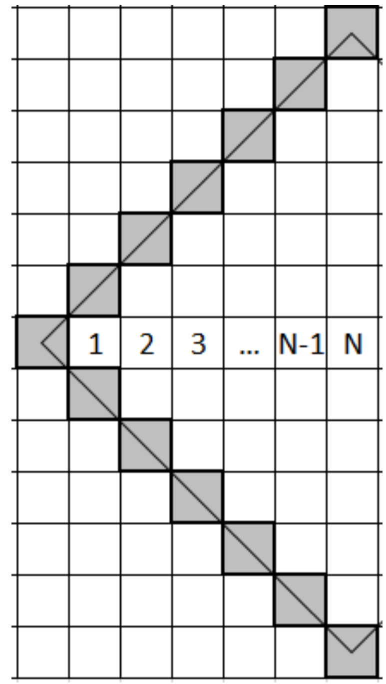


К решению задачи 7.5б

б) На рисунке показана одна из возможных ситуаций, в которой можно однозначно определить положение сокровища. Сокровище находится в клетке, отмеченной звёздочкой, так как другие клетки квадрата вокруг единицы накрыты внутренними клетками квадратов вокруг двоек.

в) Пусть Паша первыми двумя ходами проверит две соседние клетки по горизонтали. Числа, находящиеся в них, либо равны, либо отличаются на 1 (если, конечно, там оказалось сокровище, то Паша справился с задачей). В обоих случаях квадраты вокруг этих двух чисел перекроются так, что сокровище, относящееся к меньшему числу (или любому из равных) будет расположено в клетках, образующих только две стороны квадрата. Пусть меньшим числом будет $N \leqslant K$, и, без ограничения общности, указанные стороны будут слева от него. Ситуация показана на рисунке (размеры квадрата показаны условно).

Следующими ходами Паша будет проверять клетки слева направо, от 1 до максимум $N-1$ — до тех пор, пока число в клетке не совпадёт с номером этой клетки. Если совпадёт 1, то тогда сокровище надо искать в трёх клетках вокруг него, а если не совпадёт, то в этих трёх клетках заведомо нет сокровища. Если совпадёт 2, то сокровище надо искать двумя клетками выше или ниже, а если не совпадёт, то и в этих двух клетках заведомо нет сокровища, и так далее. Если в результате таких действий не совпадёт число ни в одной клетке, в том числе и с номером $N-1$, то сокровище надо искать в последних двух клетках — выше или ниже числа N.



К решению задачи 7.5в

Таким образом, на поиск сокровища Паша потратит: 2 начальных хода, не более $K-1$ хода по горизонтали, 2 хода для нахождения сокровища выше или ниже числа (3 хода, если повезло на первой клетке). Всего $2+(K-1)+2=K+3$ хода. Либо $2+1+3=6$ ходов, но $6 \leqslant K+3$ по условию.

г) Первые два хода сделаем так же, как и в пункте в). Для оставшегося уголка из двух сторон квадрата вокруг числа N сделаем ещё три хода — в его концы и центральную клетку. Если сокровище ещё не найдено, то подозрительными останутся клетки в двух диагональных отрезках, содержащих $N-1 \leqslant 2022$ клеток.

Опишем теперь следующую операцию. Если в таком отрезке выделить $M+1$ подряд идущих клеток, то существует квадрат, для которого выделенные клетки являются стороной. При этом все остальные клетки квадрата лежат строго внутри квадрата со стороной N, полученного первыми двумя ходами, а потому заведомо не содержат сокровища. Тогда Паша может проверить центральную клетку квадрата — если там окажется число M, то среди выделенных $M+1$ клеток сокровище есть, а если не M — то его нет. Для удобства эту операцию будем делать для любого $M \geqslant 0$, причём при $M=0$ квадрат вместе с границей — это просто одна клетка.

С помощью описанной операции Паша сначала оставит один из двух отрезков. Далее будем делить пополам отрезок — выделять половину клеток с одного из краёв (если количество клеток нечётно — половину всех, не считая центральную). Тогда даже в худшем случае ему понадобится ещё не более 12 ходов, так как $2^{11} > 2022$. Действительно, количество непроверенных вариантов за 11 ходов не будет превосходить 1011, 506, 253, 127, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 клеток соответственно. Итого Паша потратит на поиск не более $2+3+1+12=18$ ходов, что даже меньше предложенных двадцати.

Ответ. а) 2 хода; б) Могло.

8 класс

8.1. *Расставьте в таблице 3×3 натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы каждое число было использовано по одному разу, а сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце являлась простым числом.*

Решение. Пример расстановки чисел

6	8	9
1	7	3
4	2	5

8.2. *Могут ли числа a, b, c (не обязательное целые) в каком-то порядке совпадать с числами $a+1, b^2+2, c^3+3$?*

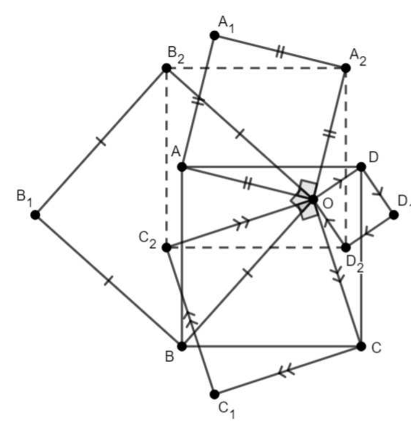
Решение. Пусть M — наибольшее из чисел a, b, c,. Заметим, что M положительное, так как b^2+2 положительное. Очевидно, $M+1 > M$. Покажем, что числа M^2+2 и M^3+3 тоже больше M. Если $M \geqslant 1$, то $M^2+2 > M^2 \geqslant M$ и аналогично $M^3+3 > M^3 \geqslant M$, а если $M < 1$, то $M^2+2 > 1 > M$ и $M^3+3 > 1 > M$. То есть максимальное число в наборе Максима больше M, значит наборы чисел не могли совпасть.

Ответ. Не могли.

8.3. *Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка O. На отрезках AO, BO, CO, DO построили квадраты OAA_1A_2, OBB_1B_2, OCC_1C_2, ODD_1D_2 (все вершины названы в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.*

Решение. Способ 1.

Рассмотрим треугольники AOB и A_2OB_2. По построению $AO = A_2O$ и $BO = B_2O$. Если углы AOA_2 и BOB_2 имеют общую часть, то $\angle AOB = 90^\circ - \angle AOB_2 = \angle A_2OB_2$, если нет — $\angle AOB = 90^\circ + \angle AOB_2 = \angle A_2OB_2$. Отсюда следует равенство треугольников AOB и A_2OB_2 и $A_2B_2 = AB$. Аналогично доказывается, что $B_2C_2 = BC$, $C_2D_2 = CD$, $D_2A_2 = DA$, то есть $A_2B_2C_2D_2$ — ромб. Докажем равенство треугольников AOC и A_2OC_2. $A_2O = AO$ и $C_2O = CO$ по построению, а также $\angle AOC = 90^\circ + \angle AOC_2 = \angle A_2OC_2$. Равенство треугольников доказано, а значит $A_2C_2 = AC$. Аналогично, $B_2D_2 = BD = AC$, значит в силу равенства диагоналей четырёхугольника $A_2B_2C_2D_2$ получаем, что он является квадратом.



К решению задачи 8.3

Способ 2. При повороте с центром в точке O на 90° по часовой стрелке точки A, B, C, D перейдут в точки A_2, B_2, C_2, D_2 соответственно. Значит квадрат $ABCD$ перейдёт в четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$. Поскольку при повороте сохраняются длины и углы, то $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.

8.4. *Сколькими способами можно расставить по кругу все натуральные числа от 1 до $2n$ так, чтобы каждое число было делителем суммы двух соседних с ним чисел? (Способы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются одинаковыми)*

Решение. Заметим, что если числа в круге не чередуются по чётности, то какие-то два чётных числа стоят рядом. Чётное число является делителем суммы чётного соседнего с ним числа и второго соседнего, значит оно тоже чётное. Продолжая рассуждения далее по кругу, получаем, что все числа в круге чётные, что неверно. Рассмотрим число $2n-1$. По доказанному, оба его соседа являются чётными и их сумма делится на $2n-1$, значит сумма равна хотя бы $4n-2$. Максимальная сумма двух оставшихся чисел равна $2n+(2n-2)=4n-2$. Значит рядом с $2n-1$ стоят числа $2n$ и $2n-2$. Без ограничения общности, пусть они стоят в порядке убывания по часовой стрелке. Теперь и в дальнейшем ситуация будет следующей: по кругу уже расставлены числа от $2n$ до k в порядке убывания по часовой стрелке, где $k>1$. Один из соседей числа k — это $k+1$, а другой сосед не больше $k-1$, то есть сумма соседних чисел больше k и не больше $2k$, значит она равна $2k$. Получается, что следующее число за k — это $k-1$. Снова получили ситуацию, описанную выше. Значит числа стоят по кругу от $2n$ до 1 в порядке убывания по часовой или против часовой стрелки (это одинаковые варианты) и никак больше.

Ответ. 1 вариант.

8.5. *На доске написано положительное рациональное число. Для любых уже написанных чисел a и b (в том числе совпадающих) разрешается выписать на доску числа $a+2b$, ab^2 и a/b^2. Всегда ли получится (возможно, в несколько действий):*

а) выписать число 1, если изначально написано одно нечётное натуральное число? (2 балла)

б) выписать число 1, если изначально написано одно чётное натуральное число? (2 балла)

в) выписать число 1, если изначально написано одно число? (3 балла)

г) выписать число 2, если изначально написано одно число? (3 балла)

д) Существует ли такое x, что если на доске написано x, то получится выписать и любое другое положительное рациональное число? (4 балла)

Решение. Сначала сделаем одно простое

Наблюдение. Если на доску выписано число x, то для любого нечётного n получится выписать nx.

Для этого достаточно выписывать числа

$$x+2x=3x, 3x+2x=5x, \ldots, (2k-1)x+2x=(2k+1)x,$$

пока не получится nx. Теперь перейдем к решению задачи.

а) Да, это возможно. Обозначим исходное число n. По нашему наблюдению возможно получить n^2, и после этого имеем право выписать $n^2/n^2=1$.

б) Да. Пусть изначально выписано число $x=2^k n$, где k натуральное и n нечётное. Будем действовать так:

I. Выпишем nx;

II. Затем $(nx)/x^2 = \frac{1}{2^k}$;

III. Затем прибавляем к x по $2 \cdot \frac{1}{2^k}$ до тех пор, пока не получим $x+1$;

IV. Как из нечётного числа $x+1$ получить единицу, описано в решении пункта а).

в) Да, это тоже возможно. Пусть изначально выписано число $\frac{p}{q}$, где числа p и q натуральные и не имеют общих делителей. В частности, p и q не могут одновременно быть чётными. Возможны два случая:

1. Число q нечётное.

   Тогда наше наблюдение позволяет нам выписать целое (и даже чётное) число $\frac{p}{q} \cdot q^2 = pq$, а как получить из него единицу, описано в решении пункта б);

2. Число q чётное.

   Значит p — нечётное. Выпишем $\frac{p}{q} / \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{q}{p}$. Задача сведена к предыдущему случаю.

г) Нет, не всегда. Пусть изначально выписано число 1. Покажем, что в таком случае все числа, которые мы когда-либо выпишем на доску, представимы в виде отношения двух нечётных чисел. В начальный момент времени это так. Теперь возьмем какие-нибудь $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, где m, n, p, q нечётные. Легко видеть, что все три числа $\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2$, $\frac{m}{n} / \left(\frac{p}{q}\right)^2$ и $\frac{m}{n} + 2 \cdot \frac{p}{q} = \frac{mq+2pn}{nq}$ снова представимы в виде отношения двух нечётных. Таким образом, мы никогда не получим число 2.

д) Да, например, $x = 2$. В пункте б) описано, как из числа 2 получить единицу. Выпишем также $2/2^2 = \frac{1}{2}$. Прибавив к единице $2 \cdot \frac{1}{2}$ нужное число раз, можем получить любое натуральное число. Наконец, если мы получили pq и q, то далее имеем право выписать $pq/q^2 = \frac{p}{q}$. Таким образом, возможно получить любое положительное рациональное число.

9 класс

9.1. *Найдите наименьшее шестизначное число, кратное 11, у которого сумма первой и четвёртой цифр равна сумме второй и пятой цифр и равна сумме третьей и шестой цифр.*

Решение. Пусть искомое число имеет вид $\overline{1000xy}$, где x, y — некоторые цифры. Тогда по условию сумма первой и четвёртой цифр равна 1, откуда $x = y = 1$. Но число 100011 не кратно 11. Поэтому будем искать число вида $\overline{1001xy}$. Тогда $x = y = 2$, а число 100122 делится на 11.

Ответ. 100122.

9.2. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BIC касается прямой AB. Докажите, что эта окружность касается прямой AC.*

Решение. Сразу заметим, что BI и CI — биссектрисы углов треугольника ABC. Обозначим точкой O центр описанной окружности треугольника BIC. Из условия касания следует, что $\angle OBA = 90°$. Пусть $\angle IBA = \angle IB = \beta$, тогда $\angle OBC = 90° - 2\beta$. Треугольник OBC — равнобедренный, а значит $\angle OCB = 90° - 2\beta$ и $\angle BOC = 4\beta$. Треугольник BOI — равнобедренный и $\angle OBA = 90° - \beta$, значит $\angle BOI = 2\beta$. Треугольник COI — равнобедренный и $\angle COI = \angle BOC - \angle BOI = 2\beta$, значит $\angle OCI = 90° - \beta$, $\angle BCI = \angle OCI - \angle OCB = \beta$ и $\angle ACI = \angle BCI = \beta$. Следовательно, $\angle OCA = 90°$ и поэтому AC касается описанной окружности треугольника BIC, что и требовалось доказать.

9.3. *Петя назвал Васе два ненулевых действительных числа x, y и попросил вычислить два новых числа: $x + \frac{1}{y^2}$ и $y^2 + \frac{1}{x}$. Вася всё перепутал и посчитал значения выражений $x^2 + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x^2}$. Тем не менее, результаты получились теми же, только в обратном порядке. Докажите, что Петя назвал Васе два одинаковых числа.*

Решение. Предположим, что $x \neq y$. По условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y^2} = y + \frac{1}{x^2}, \\ y^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы перепишем в виде $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$. Так как $x \neq y$, получим $x + y = -\frac{1}{xy}$.

Второе уравнение системы перепишем в виде $x - y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}$. Так как $x \neq y$, получим $x + y = -x^2y^2$.

В итоге $\frac{1}{xy} = x^2y^2$, то есть $xy = 1$. Подставив в последнее полученное равенство, получим уравнение $x + \frac{1}{x} = -1$, которое не имеет решений. Следовательно $x = y$.

9.4. *Даны набор $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ и набор $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}\}$, являющийся перестановкой набора S. Известно, что для любых $1 \leqslant n, m \leqslant 2022$ выражение $a_n + a_m$ делится нацело на НОД$(n; m)$. Найдите число возможных наборов A.*

Решение. Пусть n и m равны и равны некоторому нечётному числу. Тогда $2a_n \,\vdots\,$ НОД$(n; n) = n$, а значит $a_n \,\vdots\, n$. При $n \geqslant 1013$ это выполняется только если $a_n = n$ при $n = \{1013, 1015, \ldots, 2021\}$. Пусть n и m — чётные. Тогда a_n и a_m должны быть одной чётности, а значит все числа $a_2, a_4, \ldots, a_{2022}$ одной чётности, а все числа $a_1, a_3, \ldots, a_{2021}$ — другой чётности. В частности, уже доказано, что a_{2021} — нечётное, поэтому числа $a_1, a_3, \ldots, a_{2021}$ — нечётные, а числа $a_2, a_4, \ldots, a_{2022}$ — чётные. Возьмём максимальное нечётное число k, для которого a_k ещё не определено. По доказанному ранее $a_k \,\vdots\, k$, и все нечётные числа, большие k, уже определены, значит $a_k = k$. Продолжая процесс, получим $a_k = k$ при всех нечётных k. Теперь осталось решить задачу для чисел $a_2, a_4, \ldots, a_{2022}$, которые совпадают с набором чисел $2, 4, \ldots, 2022$. Пусть $a_{2n} = 2b_n$ и $a_{2m} = 2b_m$, где $1 \leqslant n,\ m,\ b_n,\ b_m \leqslant 1011$. Тогда $a_{2n} + a_{2m} = 2(b_n + b_m) \,\vdots\,$ НОД$(2n; 2m) =$ 2НОД$(n; m)$. Значит для любых $1 \leqslant n,\ m,\ b_n,\ b_m \leqslant 1011$ выполнено $b_n + b_m \,\vdots\,$ НОД$(n; m)$. Мы свели задачу к аналогичной, но для набора чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 1011\}$. Повторим аналогичные рассуждения и получим, что $b_k = k$ для всех нечётных k, значит $a_{2k} = 2k$ для всех нечётных k. Теперь осталось определить числа a_k с индексами, кратными четырём. Повторяя процесс многократно, мы дойдём до ситуации, когда остался набор чисел $\{1, 2\}$, а соответствует он числам 2^p и 2^{p-1} таким, что $2^p \leqslant 2022 < 2^{p+1}$, то есть числам a_{512} и a_{1024}.

Случай 1. $a_{512} = 512$, $a_{1024} = 1024$. В таком случае $a_n = n$ при всех $1 \leqslant n \leqslant 2022$. Условие задачи выполняется, так как если НОД$(n; m) = d$, то $n = dx$, $m = dy$ и $a_n + a_m = n + m = d(x + y) \,\vdots\,$ НОД$(n; m) = d$.

Случай 2. $a_{512} = 1024$, $a_{1024} = 512$. Для всех пар n, m, не равных 512 и 1024 и при $n = 512$, $m = 1024$ условие проверено в предыдущем случае. Во всех остальных случаях либо $a_n + 512 = n + 512 \,\vdots\,$ НОД$(n; 1024)$, что верно, так как НОД$(n; 1024) \leqslant 512$, либо $a_n + 1024 = n + 1024 \,\vdots\,$ НОД$(n; 512)$, что верно, так как 1024 кратно 512.

Оба набора чисел подходят.

Ответ. Два набора.

9.5. *Забор Тома Сойера состоит из n досок. Бен Роджерс и Билли Фишер по очереди красят по одной доске, причём Бен красит в красный цвет, а Билли — в синий. Начинает Бен. Если кто-то из мальчиков покрасит две соседние доски, то немедленно будет выгнан купаться, а оставшийся получит серединку от яблока; если же забор полностью окрашен, а такой ситуации так и не случилось, Том оставляет серединку от яблока себе.*

а) Докажите, что если $n = 2022$, то Билли Фишер может избежать участи отправиться купаться. *(3 балла)*

Имеет ли кто-то из мальчишек стратегию, которая позволит ему гарантированно получить серединку от яблока, если:

б) n — нечётное число, большее 10; *(5 баллов)*

в) n — чётное число, большее 10? *(6 баллов)*

Решение. Занумеруем доски забора от 1 до n в порядке от одного края забора до другого.

а) Билли достаточно каждый раз красить доску, противоположную покрашенной Беном (т.е. если Бен красит доску с номером k, то Билли — доску с номером $n+1-k$).

б) Покажем, что такую стратегию имеет Билли. Частичную раскраску забора будем называть *хорошей*, если выполняются все следующие условия:

- покрашено четное число досок (таким образом, очередь красить принадлежит Бену);

- красные и синие доски чередуются;

- одна из крайних досок забора синяя;

- никакие две соседние доски не покрашены в один цвет.

Покажем, что Билли может действовать так, что после каждого его хода раскраска будет хорошей (что, в частности, значит, что Билли не выгонят купаться).

Какую бы доску не покрасил Бен в самом начале, Билли в ответ покрасит одну из крайних досок забора. Очевидно, такая раскраска хорошая.

Теперь заметим, что если (в какой-либо момент времени) раскраска забора хорошая, то в результате хода Бена образуется две красные доски, между которыми нет синих. Если эти две доски соседние, Билли победил, а иначе Билли может покрасить любую доску между ними и снова получить хорошую раскраску.

Покажем, что описанная стратегия принесет Билли серединку от яблока. От противного: пусть забор покрашен полностью и серединка от яблока осталась у Тома, то есть никакие две соседние доски не окрашены в один цвет. Значит, цвета досок чередуются в шахматном порядке. Число n нечетное, значит, Бен покрасил на одну доску больше, но в таком случае обе крайние доски должны быть красные. Противоречие.

Отметим, что указанная стратегия работает для любого нечетного $n > 1$.

в) Покажем, что и в этом случае серединку от яблока получает Билли.

Наблюдение. Пусть в некоторый момент игры получилась хорошая раскраска, которую невозможно продолжить до шахматной. Тогда Билли может продолжить играть по стратегии, описанной в пункте б), и победить.

Сначала предположим, что первым своим ходом Бен покрасил доску с номером k, отличную от двух крайних. Тогда если k четное, то Билли красит доску с номером n, а если нечетное, то с номером 1. Получилась хорошая раскраска, которую невозможно продолжить до шахматной. Значит, по нашему наблюдению Билли побеждает.

Теперь пусть Бен своим первым ходом покрасил одну из крайних досок — без ограничения общности, доску номер 1. Билли в ответ красит доску с номером n. Далее снова возможно два случая:

1. Бен красит любую доску, кроме третьей. Тогда Билли сам красит третью доску и, согласно нашему наблюдению, выигрывает;

2. Бен красит доску номер 3. Тогда Билли красит пятую. Бен своим ходом вынужден покрасить какую-то доску между пятой и n-й, а Билли в ответ красит доску номер 2. Мы опять получили хорошую раскраску, не продолжающуюся до шахматной, и Билли снова побеждает.

Таким образом, Билли выигрывает при любых действиях Бена.

Отметим, что наша стратегия работает для всех чётных $n \geqslant 8$. Оставшиеся неразобранными случаи $n = 1, 2, 4, 6$ мы оставляем заинтересованному читателю.

10 класс

10.1. *Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $x + y > 2$.*

Решение. Числа x и y положительны, так как куб каждого из них больше неотрицательного числа — квадрата другой переменной. Значит, можно перемножить левые и правые части неравенств. Получим

$$x^3y^3 > x^2y^2 \Leftrightarrow xy > 1 \Leftrightarrow y > \frac{1}{x}.$$

Тогда

$$x + y > x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

10.2. *Рассказывая об однокруговом турнире по шахматам (каждый участник сыграл с каждым по одной партии), комментатор сказал следующее: «В турнире участвовали 15 человек; победитель турнира набрал вдвое больше очков, чем участник, занявший последнее место. Остальные 13 участников набрали одно и тоже промежуточное (между первым и последним) количество очков, поделив, таким образом, места с 2-го по 14-е.» Докажите, что комментатор хоть раз, да ошибся. (В шахматной партии победитель получает одно очко, проигравший — ноль очков, а в случае ничьей оба участника получают по пол-очка.)*

Решение. Всего в турнире было проведено $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ партий; следовательно, участники набрали в сумме 105 очков ровно. Пусть занявший последнее место набрал x очков, тогда победитель набрал $2x$ очков. Пусть также каждый из остальных 13 участников набрал y очков (Числа x и y — целые или полуцелые, то есть это дроби, знаменатели которых 1 или 2; по условию $x < y < 2x$). Имеем равенство

$$x + 2x + 13y = 105.$$

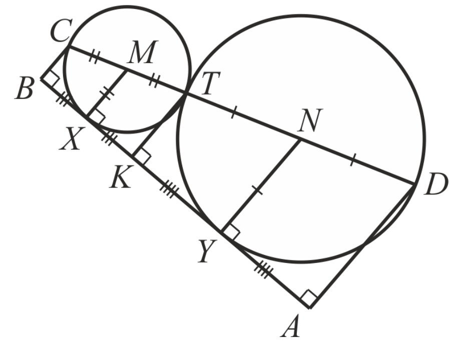
Теперь, если $y = 7$, то $3x = 14$, откуда x — не полуцелое. Если $y \geqslant 7,5$, то $3x \leqslant 6,5$, откуда $2x < 6,5 < y$ — противоречие. Наконец, если $y \leqslant 6,5$, то $3x \geqslant 20,5$, $x \geqslant 6,5 \geqslant y$ — снова противоречие.

10.3. *В прямоугольной трапеции $ABCD$ на большей боковой стороне CD нашлась такая точка T, что окружности с диаметрами CT и TD касаются боковой стороны AB каждая. Обозначим точки касания стороны AB окружностями как X и Y. Может ли оказаться, что $AY = BX$? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть M — центр окружности с диаметром CT, N — с диаметром DT.

Тогда $MC = MT = MX$ и $ND = NT = NY$. Кроме того $MX \perp AB$ и $NY \perp AB$, как радиусы, проведённые в точку касания окружности и прямой. Опустим из точки T перпендикуляр на AB, отрезок TK. Тогда MX — средняя линия трапеции $KBCT$, поэтому $KX = XB$. Аналогично $KY = YA$.

Если $AY = BX$, то $YK = KX$, отрезок KT — средняя линия трапеции $YXMN$ и $MT = TN$. Это означает, что окружности равны, (а точка T — середина стороны CD). Но тогда $AB \parallel CD$, что невозможно по определению трапеции.

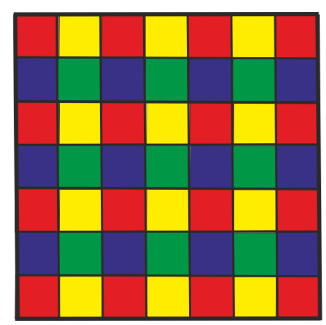


К решению задачи 10.3

Ответ. Не может.

10.4. *Квадрат 7×7 разрезали без остатка (по линиям сетки) на трёхклеточные уголки и маленькие квадраты размера 2×2. Докажите, что маленький квадрат получился ровно один.*

Решение. Раскрасим клетки квадрата в 4 цвета (см. рисунок). Заметим, что две клетки одного цвета не могут попасть ни в какую одну фигуру, на которые квадрат разрезан. Тогда, поскольку у нас есть 16 красных клеток, общее число уголков и квадратов со стороной 2 не менее 16. Пусть квадратов x, а уголков y. Тогда $x + y \geqslant 16$ и $3x + 3y \geqslant 48$. Из подсчёта количества клеток следует равенство $4x + 3y = 49$, откуда $3x + 3y = 49 - x$. Значит, $49 - x \geqslant 48$ и $x \leqslant 1$. Ещё заметим, что $x \neq 0$, так как 49 на 3 нацело не делится.



К решению задачи 10.4

10.5. *В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4:1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3:1$, на победу третьей — $1:1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых.*

а) Буратино собирается поставить на всех трёх лошадей, но так, чтобы вне зависимости от исхода скачек получить по крайней мере на 2 золотых больше, чем поставил. Подскажите Буратино сколько золотых на какую лошадь поставить, если общая сумма поставленных денег равна 50 золотым. *(3 балла)*

б) Пьеро желает поставить в сумме ровно 25 золотых, чтобы получить гарантированно хотя бы на 1 золотой больше. Сможет ли он это сделать? *(2 балла)* *в) Папа Карло намерен сделать такие ставки, чтобы гарантированно получить на 5 золотых больше, чем он поставил. Какую наименьшую сумму денег для этого он должен иметь?* *(5 баллов)*

г) Карабас-Барабас хочет так сделать ставки, чтобы гарантированно получить денег хотя бы на 6% больше, чем поставлено. Сможет ли он это сделать? Денег у Карабаса-Барабаса куры не клюют. *(4 балла)*

Решение. а) Если Буратино поставит 11 золотых на первую лошадь, 13 — на вторую и 26 на третью, то он всегда получит мимимум на 2 золотых больше. Действительно, если побеждит первая лошадь, он получит 55 золотых (11 — возврат ставки и 44 выигрыш), если вторая — 52 золотых (из них 13 — это возврат ставки), а если третья — 52 золотых (26 — возврат ставки).

Можно доказать, рассуждая, например, как в следующем пункте, что такое размещение денег Буратино строго единственно.

б) Чтобы гарантированно выиграть, Пьеро должен на каждую лошадь ставить столько, чтобы полученные за выигрыш деньги (вместе с возвратом ставки) превзошли 25 золотых. Значит, на первую лошадь он обязан ставить больше $25 : 5 = 5$ золотых, на вторую — больше $25 : 4 = 6,25$ и на третью — больше $25 : 2 = 12,5$. Так как все ставки целочислены, он должен поставить в сумме $6+7+13 = 26 > 25$, поэтому гарантировать себе хоть какой-то выигрыш он не сможет.

в) Пусть Папа Карло поставил всего S золотых, из которых x на первую лошадь, y — на вторую и z — на третью ($x+y+z = S$). Предположим, что выиграла первая лошадь. Тогда Папа Карло получит $x + 4x = 5x$, и ему необходимо, чтобы эта величина была больше, чем S хотя бы на 5. Имеем неравенство $5x \geqslant S + 5$, то есть $x \geqslant \frac{S}{5} + 1$. Теперь предположим, что выиграла вторая лошадь; аналогичные рассуждения приводят к неравенству $y \geqslant \frac{S}{4} + 1,25$. Наконец, предполагая, что выиграет третья лошадь, придём к неравенству $z \geqslant \frac{S}{2} + 2,5$. Сложив все три полученные неравенства, получим $x+y+z \geqslant \frac{19S}{20} + 4,75$. Так как $x + y + z = S$, последнее неравенство равносильно условию $S \geqslant 95$.

Пример, когда $S = 95$, получится, если мы в предыдущем рассуждении все неравенства заменим равенствами. Тогда $x = 20$, $y = 25$ и $z = 50$. Легко проверить, что при любом исходе скачек Папа Карло выиграет свои 5 золотых.

г) Рассуждения аналогичны рассуждениям предыдущего пункта. Пусть Карабас-Барабас поставил S золотых, из которых x на первую лошадь, y — на вторую и z — на третью. Для гарантированного 6% выигрыша необходимо на каждую лошадь поставить столько, чтобы полученные за её выигрыш деньги (вместе с возвратом поставленных) были не менее, чем $1,06S$. Это эквивалентно выполнению системы неравенств: $5x \geqslant 1,06S$, $4y \geqslant 1,06S$ и $2z \geqslant 1,06S$. Умножим первое неравенство на 4, второе — на 5, третье — на 10 и сложим левые и правые части всех трёх неравенств. Получим $20(x + y+z) \geqslant 1,06S(4+5+10)$, откуда (с учётом того, что $x+y+z = S$), получим невозможное неравенство $20 \geqslant 20,14$. Значит, 6% выигрыша гарантировать невозможно.

11 класс

11.1. *Решите уравнение*

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Решение. Проверим, что $x = 1$ — корень. Действительно,

$$1^4 + 2\sqrt{1-1} + 3 \cdot 1^2 - 8 + 4 = 1 + 3 - 8 + 4 = 0.$$

Покажем, что других корней нет. Поскольку левая часть уравнения определена лишь при $x \geqslant 1$, достаточно рассмотреть случай $x > 1$. Воспользовавшись верными в этом случае неравенствами $x^4 > x^2$, $x\sqrt{x-1} > 0$ и $(x-1)^2 > 0$, получаем для левой части неравенство

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 > 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2 > 0,$$

выполненное при всех $x > 1$. Итак, при $x > 1$ корней нет.

Ответ. $x = 1$.

11.2. *Дан тетраэдр. Обязательно ли найдутся ли четыре параллельные плоскости, проходящие каждая через свою вершину тетраэдра так, чтобы расстояния между любыми соседними плоскостями были одинаковыми?*

Решение. Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Отметим на ребре AD две точки K, L так, чтобы $AK : KL : LD = 1 : 1 : 1$. Заметим, что отрезки KB и CL не находятся на одной прямой. Тогда можно провести через вершины A, K, L, D плоскости $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D$ параллельно KB и CL. Осталось показать, что соседние среди этих четырех плоскостей находятся на одном и том же расстоянии между собой.

Действительно, по построению α_B, α_C будут проходить через K, L соответственно. Опустим из D на плоскость α_A перпендикуляр AH. Применяя теорему Фалеса к AD и AH, получим что перпендикуляр AH делится плоскостями α_B, α_C в отношении $AK : KL : LD = 1 : 1 : 1$. Поскольку перпендикуляр общий ко всем плоскостям, то всё показано.

Ответ. Можно.

11.3. *Даны различные простые числа p, q, r. Произведение pqr нацело делится на $p+q+r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ является квадратом натурального числа.*

Решение. Делители числа pqr — суть числа 1, p, q, r, pr, pq, qr и pqr. Число $p+q+r$ больше первых четырёх из них и меньше последнего, то есть оно одно из чисел pr, pq, qr. Без ограничения общности $p+q+r = pq$, то есть $-p-q+pq = r$. Тогда

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = r + 1$$

и

$$(p-1)(q-1)(r-1)+1=(r+1)(r-1)+1=r^2.$$

11.4. *Нюша имеет* 2022 *монеты, а Бараш — 2023. Нюша и Бараш бросают все свои монеты одновременно и считают сколько орлов выпало у каждого. Выигрывает тот из них, у кого окажется орлов больше, а в случае равенства выигрывает Нюша. С какой вероятностью выигрывает Нюша?*

Решение. Пусть Бараш пока забыл про последнюю свою монету. Если у Бараша больше — он уже выиграл, если у Нюши больше — уже проиграл, шансы этих вариантов одинаковы, поскольку монет у них одинаково. Если же случилась ничья, то исход решит забытая монета, где снова шансы каждого — $50:50$. Итак, их шансы равны, вероятность выигрыша Нюши равна $0,5$.

Ответ. $0,5$.

11.5. *Крош, узнав корни уравнения $x^2-x-1=0$, изобрел «золотую систему счисления Кроша», систему счисления с основанием $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Лосяш отметил, что фактически Крош находит разложения положительных чисел на суммы каких-то различных целых степеней числа φ. Например, в этой системе счисления запись $11,1$ соответствует числу*

$$1+\sqrt{5}=\varphi^1+\varphi^0+\varphi^{-1}.$$

Лосяш также заявил, что если число имеет разложение, то у него их бесконечно много и всегда можно обойтись разложением, в котором нет пары соседних степеней φ; само же разложение есть у всех положительных чисел $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$, где m,n — целые и одной четности. Докажите, что Лосяш прав, для чего:

а) Найдите хотя бы пять различных разложений числа 1. *(2 балла)*

б) Докажите, что если число можно разложить в такую сумму, то можно и в сумму, в которой нет пары соседних степеней φ. *(2 балла)*

в) Докажите, что если a разложимо, то и $a+1$ разложимо. *(3 балла)*

г) Докажите, что сумма и произведение разложимых чисел также разложимы. *(2 балла)*

д) Докажите, что если для каких-то целых m,n одной четности число $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ положительно, то это число разложимо. *(5 баллов)*

Решение. а) Заметим, что φ, как корень $\varphi^2-\varphi-1=0$, дает $1=\varphi^{-1}+\varphi^{-2}=0.11_\varphi$. Последовательно воспользовавшись $\varphi^{-k}=\varphi^{-k-1}+\varphi^{-k-2}$ для всех k, получаем $1=1,0_\varphi=0,11_\varphi=0,1011_\varphi=0,101011_\varphi=0,10101011_\varphi=\ldots$, то есть для всех натуральных k,

$$1=\varphi^{-1}+\varphi^{-3}+\ldots+\varphi^{-2k+1}+\varphi^{-2k}.$$

Выбор пяти различных натуральных чисел, равно как подстановку их в формулу выше, предоставляем читателю.

б) От противного, пусть нашлось разложимое число a, любое разложение которого содержит соседние степени. Среди всех разложений возьмем то, что с наименьшим числом слагаемых. Среди его слагаемых есть соседние степени φ^k, φ^{k-1}, выберем такое k наибольшее. Тогда слагаемого φ^{k+1} в этом разложении нет. Поскольку $\varphi^{k+1} = \varphi^{k-1}\varphi^2 = \varphi^{k-1}(\varphi+1) = \varphi^k + \varphi^{k-1}$, то, заменяя $\varphi^k + \varphi^{k-1}$ на φ^{k+1}, получим из исходного разложение a, строка которого содержит меньшее число слагаемых, но это противоречит выбору разложения. Значит всегда найдется разложение без соседних степеней.

в) Число a разложимо, выберем его разложение без соседних степеней. Пусть k — наименьшее целое неотрицательное число такое, что слагаемого φ^{-2k} в разложении нет. Поскольку слагаемых конечное число, такое найдётся. Если $k=0$, то, добавив φ^0 в сумму, мы получим разложение у $a+1$. Поэтому можно считать, что φ^0 уже есть. В разложении a еще есть слагаемые $\varphi^{-2}, \ldots, \varphi^{-2k+2}$, а значит нет $\varphi^{-1}, \varphi^{-3}, \ldots, \varphi^{-2k+1}$. По выбору k там нет и φ^{-2k}. Поскольку $\varphi^{-1} + \varphi^{-3} + \ldots + \varphi^{-2k+1} + \varphi^{-2k} = 1$, то добавляя эти слагаемые в исходное разложение, получаем разложение $a+1$.

г) Если добавление единицы сохраняет разложимость, то и добавление φ^k (при любом целом k). Ну то же имееет место при сложении с любым конечным числом целых степеней φ, то есть с любым разложимым числом.

Представим два разложимых числа a_1, a_2 в виде суммы степеней φ (r_1 и r_2 степеней φ соответственно). После их перемножения мы получим сумму $r_1 r_2$ степеней φ. Каждая степень разложима, значит и сумма этих $r_1 r_2$ чисел также разложима. Но эта сумма и являлась произведением $a_1 a_2$.

д) Лемма. Если разложимо $a > 1$, то разложимо и $a-1$.

Доказательство леммы. Рассмотрим разложение a без соседних степеней. Пусть его старшая степень равна k. Случай $k=0$ очевиден. Случай $k<0$ невозможен в силу $1 < a < \varphi^{-k}(1 + \ldots + \varphi^{-2r} + \ldots) = \frac{\varphi^{-k}}{1-\varphi^{-2}} \leqslant 1$. Итак, $k > 0$.

Отметим, что $a - \varphi^k$ разложимо, причем $a - 1 = a - \varphi^k + \varphi^k(1-\varphi^{-k})$. Поскольку сумма разложимых разложима, достаточно показать разложимость $1 - \varphi^{-k}$. Среди разложений единицы найдется и имеющее слагаемое φ^{-k}. Тогда $1-\varphi^{-k}$, а следом $\varphi^k - 1$ и $a-1$ разложимы. Лемма доказана.

Из леммы, если неразложимо a, то и $a + \varphi = \varphi(a\varphi^{-1} + 1)$. Если бы нашлось неразложимое число $a = \frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ с целыми m, n одной четности, то, добавляя $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ несколько раз, нашли бы и неразложимое $m' + n'\sqrt{5}$ с натуральными m', n'. Но это число всегда разложимо как сумма слагаемых 1 и $\sqrt{5}$. Значит и исходного числа a не существует.