XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

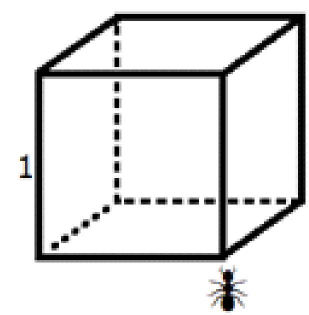
5 класс

5.1. На доске написано неверное равенство:

$$4077 + 7704 + 7740 = 2021$$

Вычеркните ровно по одной цифре в каждом из слагаемых так, чтобы равенство стало верным.

5.2. Муравей сидит в одной из вершин куба со стороной 1 метр. Он может ползать по рёбрам куба. Может ли он проползти по каждому ребру куба дважды и вернуться в начало пути (возможно, проходя через начальную вершину в процессе движения несколько раз)? Направление движения муравей меняет только в вершинах куба. Ответ обоснуйте.



К условию задачи 5.2

5.3. Когда сторону квадрата уменьшили в 3 раза, его площадь уменьшилась на 27 см^2. На сколько уменьшится площадь нового квадрата, если его сторону ещё раз уменьшить в 3 раза? Ответ обоснуйте.

5.4. Все натуральные числа от 1 до 99 включительно записали в ряд. Под каждым числом подписали произведение его цифр. С получившимся рядом проделали то же самое и т. д. Сколько нечётных чисел в пятом ряду? Ответ обоснуйте.

5.5. В замке живут N рыцарей. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из рыцарей не дружит с врагом своего друга, и каждый рыцарь имеет ровно трёх врагов. Найдите все N, при которых это возможно.

XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

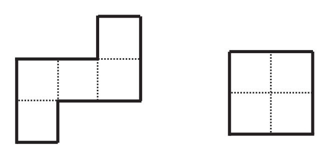
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

6 класс

6.1. Николай живет в многоэтажном доме без лифта. Сегодня он готовит борщ, но у него нет нескольких ингредиентов. Сначала он спустился к тёте Клаве за свёклой. На полпути к ней он проходил мимо 12 этажа. Тётя Клава напомнила Николаю, что для борща нужно еще и мясо. За мясом он поднялся к деду Тимофею. На полпути к нему от тети Клавы он проходил мимо 16 этажа. Дед Тимофей дал Николаю кусок мяса. После этого Николай поднялся еще на 5 этажей к дяде Васе за солью. На сколько этажей нужно теперь спуститься Николаю, чтобы попасть к себе домой и, наконец, сварить борщ? Ответ обоснуйте.

6.2. Три ученика из футбольной команды математической школы обсуждают номера на своих футболках. Алёша: «Я тут заметил, что все наши номера — двузначные простые числа». Боря: «А сумма чисел на ваших футболках равна дате моего дня рождения, который был в этом месяце». Вова: «Кстати, сумма чисел на ваших футболках равна дате моего дня рождения, который будет в этом месяце». Алёша: «А ещё, сумма чисел на ваших футболках равна сегодняшней дате». Какое число на футболке Вовы? Ответ обоснуйте.

6.3. Паша составил клетчатый квадрат размером 8×8 клеток, используя фигурки двух типов, изображённые на рисунке справа. Составьте его и Вы, причём так, чтобы присутствовали фигурки обоих типов. Фигурки могут быть повёрнуты или перевёрнуты, но не могут накладываться друг на друга.



К условию задачи 6.2

6.4. В кабинете физики есть набор из десяти гирь суммарным весом в 1 кг. Известно, что любая гиря весит меньше, чем девять остальных вместе взятых. Докажите, что все 10 гирь можно разбить на 2 группы так, чтобы суммарный вес гирь в группах отличался менее, чем в три раза.

6.5. На доске написаны три натуральных числа. Известно, что если каждое из них увеличить ровно на 4, то их произведение увеличится ровно в 30 раз. Какие числа написаны на доске? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

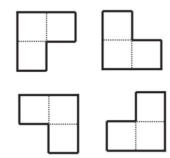
XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

7 класс

7.1. Петя и Коля покупали девочкам на Восьмое марта подарки. Петя купил ручки по цене 36 рублей за штуку, а Коля — ручки по цене 47 рублей за штуку. Оказалось, что Петя потратил меньше денег, но купил больше ручек. Докажите, что ребята вместе смогут поздравить хотя бы 9 девочек.

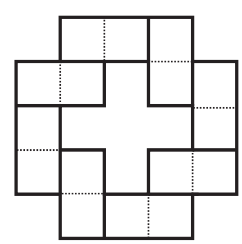
7.2. На доске 100×100 закрасили несколько клеток (размера 1×1). Оказалось, что в любом трёхклеточном уголке есть незакрашенная клетка. Докажите, что существует такое разрезание доски на прямоугольники 1×2, что в каждом прямоугольнике будет хотя бы одна незакрашенная клетка.



Уголок

7.3. Известно, что результат умножения четырёх последовательных нечётных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли оказаться в разрядах десятков и сотен полученного произведения? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

7.4. Из комплекта домино удалили все дубли (доминошки с одинаковым числом точек на обеих половинках). Используя какие-то восемь из оставшихся 21 доминошки, сложили фигуру (см. рисунок) по правилам домино: можно прикладывать друг к другу только половинки доминошек с одинаковым числом точек. Какое наименьшее суммарное число точек может быть в такой фигуре? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 7.4

7.5. Дан выпуклый четырёхугольник $KLMN$. Известно, что

$$\angle LMK + \angle MKN = 180^\circ \text{ и } KL = KN + LM.$$

Докажите, что $\angle LKM + \angle KMN = \angle MNK$.

XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

8 класс

8.1. В австралийском зоопарке 35% всех кенгуру серые, а 13% всех животных зоопарка — кенгуру, но не серые. Сколько процентов от общего числа всех животных зоопарка составляют кенгуру? Ответ обоснуйте.

8.2. Имеется набор шахматных фигур, состоящий из ферзя, двух ладей, двух коней и двух слонов. Их пронумеровали числами от 1 до 7 и расставили на шахматной доске так, что фигура 1 бьёт только фигуру 2, фигура 2 бьёт только фигуру 3, $\ldots$, фигура 7 бьёт только фигуру 1. Приведите пример такой расстановки.

8.3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB отметим точки K и N так, что $AK = KN = BN$. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника ABC равна периметру треугольника CMN.

8.4. Мальвина написала на доске натуральное число. Буратино зачем-то умножил его на 8 и получил число, больше 992 000 000, но меньше 1 000 000 000. А Пьеро разделил число Мальвины на 27 и обнаружил, что остаток от деления равен 18. Докажите, что в числе Мальвины можно поменять местами какие-то две цифры так, что изменённое число разделится на 27 нацело.

8.5. Решите уравнение

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 126.$$

XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

9 класс

9.1. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ такова, что $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$ и $f(3) < -4$. Определите знак числа a. Ответ обоснуйте.

9.2. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла C пересекла сторону AB в точке D. Оказалось, что длины отрезков CD и DB равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC (в градусах). Ответ обоснуйте.

9.3. В детской книжке три сказки. Каждая сказка начинается на новой странице, сразу после окончания предыдущей. Первая сказка начинается на первой странице книги, третья сказка заканчивается на последней. Оказалось, что для нумерации страниц, занимаемых каждой из трёх сказок, потребовалось одинаковое количество цифр. Какое наименьшее количество страниц может быть в книге, если известно, что на одиннадцатой странице художник изобразил Иванушку-дурачка? Ответ обоснуйте.

9.4. Правильный треугольник со стороной n (n — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на n равных фигур, каждая из которых состоит из n единичных треугольников. Докажите, что n нацело делится на 4.

9.5. Неравенство Швейцера. Для любых положительных чисел a, b, m, M таких, что $a, b \in [m;\, M]$ докажите неравенство:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{mM}.$$

XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

10 класс

10.1. На доске написано число 7. За ход разрешается либо умножить число, написанное на доске, на 7, либо стереть любую цифру числа. Можно ли за конечное число ходов получить на доске число 77? Ответ обоснуйте.

10.2. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60 процентов, серые — 30 процентов, а белые — 10 процентов от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истреблённых им белых ворон составляет 120 процентов от количества истреблённых серых и 30 процентов от количества истреблённых черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело две трети всех белых ворон и не более 150 черных? Ответ обоснуйте.

10.3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = CB$); CH — его высота. Построена окружность с центром в вершине C, радиус которой меньше CH; из точек A и B к окружности проведены касательные AP и BQ так, что точки касания P и Q расположены по одну сторону от прямой CH. Докажите, что точки H, P, и Q лежат на одной прямой.

10.4. На изначально пустую шахматной доску (размером 8×8 клеток) Вася хочет поставить несколько пешек и несколько ладей так, чтобы ни одна ладья не оказалась под боем другой ладьи (через пешки ладья не «прыгает»). И пешек, и ладей у Васи неограничено, кроме того, Вася может оставить какие-то поля доски пустыми. За расстановку Вася получит премию, величина которой (в рублях) равна количеству ладей в расстановке минус количество пешек в ней же. Какова максимальная премия, которую может получить Вася? Ответ обоснуйте.

10.5. Задача Шлемильха (1823-1901). Кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет три различных корня, про которые известно, что они составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Решите уравнение.

б) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c.

XX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2021

11 класс

11.1. На доске написано число 7. За ход разрешается либо умножить число, написанное на доске, на 7, либо стереть любую цифру числа. Можно ли за конечное число ходов получить на доске число 77? Ответ обоснуйте.

11.2. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60 процентов, серые — 30 процентов, а белые — 10 процентов от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истреблённых им белых ворон составляет 120 процентов от количества истреблённых серых и 30 процентов от количества истреблённых черных ворон. Сколько всего ворон было в заповеднике, если уцелело две трети всех белых ворон и не более 150 черных? Ответ обоснуйте.

11.3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = CB$); CH — его высота. Построена окружность с центром в вершине C, радиус которой меньше CH; из точек A и B к окружности проведены касательные AP и BQ так, что точки касания P и Q расположены по одну сторону от прямой CH. Докажите, что точки H, P, и Q лежат на одной прямой.

11.4. На изначально пустую шахматной доску (размером 8×8 клеток) Вася хочет поставить несколько пешек и несколько ладей так, чтобы ни одна ладья не оказалась под боем другой ладьи (через пешки ладья не «прыгает»). И пешек, и ладей у Васи неограничено, кроме того, Вася может оставить какие-то поля доски пустыми. За расстановку Вася получит премию, величина которой (в рублях) равна количеству ладей в расстановке минус количество пешек в ней же. Какова максимальная премия, которую может получить Вася? Ответ обоснуйте.

11.5. Задача Шлемильха (1823-1901). Кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

имеет три различных корня, про которые известно, что они составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Решите уравнение.

б) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты a, b, c.