XIX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

2020 г., 08 — 09 февраля

г. Екатеринбург, Уральский федеральный университет,

Институт математики и компьютерных наук

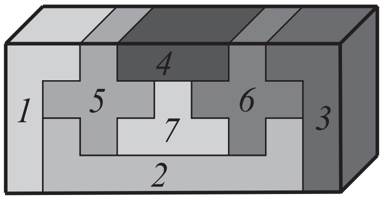
Условия задач

5 КЛАСС

5.1 На доске написано число. Первоклассник Максим сказал, что оно не больше 2020, первоклассник Валерий сказал, что оно не меньше 2020, а первоклассница Ангелина сказала, что оно равно 2020. Сколько среди этих высказываний могло быть верных? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

5.2 Отрезок разбили на 5 равных меньших отрезков. В каждом из маленьких отрезков отметили по точке и занумеровали точки последовательно (слева направо): A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Выяснилось, что расстояние между точками A_1 и A_2 равно 1 см, а расстояние между точками A_2 и A_3 равно 3 см. Может ли расстояние между точками A_4 и A_5 оказаться равным 10 см? Ответ обоснуйте.

5.3 Юный строитель Стёпа желает выложить стенку из 7 деталей конструктора, как указано на рисунке. Детали он опускает последовательно, каждую строго вертикально, и после установки уже не сдвигает. Сколько существует разных допустимых последовательностей взятия деталей для выкладывания стенки? Ответ обоснуйте. (Все детали, даже те, которые имеют одинаковую форму, разного цвета, а значит — различны.)

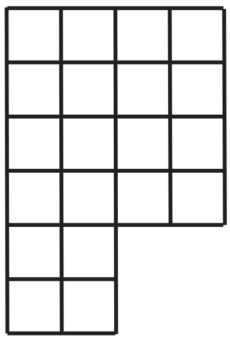


К условию задачи 5.3

5.4 Бумажная фигура состоит из 20 клеток (см. рисунок). Покажите, как

а) отрезать от данной фигуры 2 равных треугольника и переложить их так, чтобы получить квадрат. (3 балла)

б) отрезать от данной фигуры 3 равных треугольника и переложить их так, чтобы получить прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. (4 балла)


К условию задачи 5.4

5.5 Андрей выписал все натуральные числа, меньшие 2020, которые не делятся на 3 и не делятся на 5. Отличница Лиза решила посчитать произведение всех этих чисел. На какую цифру окончится результат, полученный Лизой, если она не ошибётся? Ответ обоснуйте.

6 КЛАСС

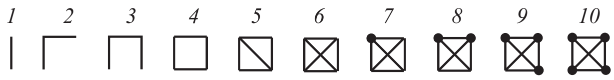
6.1 Кирилл, Дмитрий, Даниил и Павел родились в один день, 8 марта. Если из возраста Кирилла вычесть возраст Дмитрия, добавить возраст Даниила и вычесть возраст Павла, то получится 6. Сколько получится, если из года рождения Кирилла вычесть год рождения Павла, добавить год рождения Даниила и вычесть год рождения Дмитрия? Ответ обоснуйте.

6.2 Буратино выбрал три последовательных натуральных числа. Для каждого выбранного числа он посчитал сумму его цифр и полученные три суммы перемножил. Произведение получилось равным 2020. Докажите, что Буратино ошибся в вычислениях.

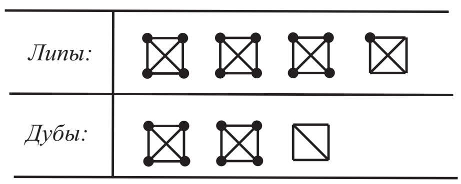
6.3 По кругу сидят 10 толстяков, все разные по толщине. Повар Пётр выбрал каких-то трёх толстяков, сидящих подряд, и дал самому тощему стейк. Повар Василий тоже выбрал каких-то трёх толстяков, сидящих подряд, и дал самому толстому стейк. Наконец, повар Михаил выбрал 5 толстяков, сидящих через одного, и дал по стейку самому тощему и самому толстому из них. Докажите, что ни один толстяк не получил больше двух стейков.

6.4 Разрежьте квадрат 1×1 дм^2 на 7 прямоугольников периметра 2 дм.

6.5 Лесник при подсчёте количества деревьев вместо чисел рисует в блокноте «отрезки» или «кружочки» (каждый символ соответствует одному дереву), используя следующие обозначения для чисел:



При этом деревья разных видов подсчитываются отдельно и записываются в разные строчки блокнота. Например, если лесник насчитает 37 лип и 25 дубов, то у него в блокноте будет нарисовано вот так:



Известно, что на лесном участке всего 2020 деревьев. Лесник, пересчитав их, использовал 1230 «отрезков» и 790 «кружочков». Какое наименьшее количество видов деревьев могло быть на этом участке? Ответ обоснуйте.

7 КЛАСС

7.1. Две бригады рабочих, A и Б, строили стратегический объект. Каждая бригада работает со своей постоянной скоростью: бригада A может справиться со строительством за 12 дней работы, а бригада Б — за 36 дней. На самом деле бригада Б приступила к работе на 4 дня позже бригады A, да ещё и отдыхала по одному дню через каждые два дня работы. Бригада A ушла в отпуск одновременно с первым выходным бригады Б и больше не возвращалась. За сколько дней (с учётом выходных) был построен стратегический объект? Ответ обоснуйте.

7.2. Коля хотел перемножить все натуральные числа от 1 до своего возраста включительно, но по невнимательности пропустил два числа. У него получилось 1 900 800. Сколько лет Коле? (Укажите все возможности и докажите, что других нет).

7.3. По кругу стоят 2020 натуральных чисел. Известно, что сумма любых трёх стоящих подряд чисел равна сумме следующих за ними по часовой стрелке трёх стоящих подряд чисел. Одно из чисел равно 2020. Какие значения могут принимать числа, стоящие рядом с ним справа и слева? Ответ обоснуйте.

7.4. У Пети есть бумажный треугольник. Он может согнуть его дважды, каждый раз вдоль некоторой прямой линии. Ему необходимо получить многоугольник (возможно невыпуклый), для каждой стороны которого найдётся параллельная ей другая сторона. Всегда ли Петя может этого добиться? Ответ обоснуйте.

7.5 Школьники написали несколько контрольных работ, оценки за которые могут принимать значения 1, 2, 3, 4, 5. Известно, что никакие два школьника не написали контрольные одинаково (т. е. хотя бы за одну из контрольных их оценки различаются). Будем говорить, что один школьник *успешнее* другого, если на каждой контрольной он получил оценку выше другого (оценки за разные контрольные не сравниваются).

а) Школьники написали две контрольные работы. Может ли оказаться так, что среди 9 школьников нет двоих, один из которых успешнее другого? (1 балл)

б) Докажите, что если контрольных работ было две, то среди любых 10 школьников всегда найдутся найдутся двое, один из которых успешнее другого. (4 балла)

в) Докажите, что если контрольных работ было две, то среди любых 17 школьников всегда найдутся трое таких, что один из них успешнее второго, а второй — третьего. (4 балла)

г) Пусть школьники написали три контрольные работы. При каком наименьшем количестве школьников можно утверждать, что наверняка найдутся двое, один из которых успешнее другого? (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

8 КЛАСС

8.1 Числа x, y удовлетворяют равенствам

$$x + 4 = (y - 2)^2, \qquad y + 4 = (x - 2)^2.$$

Какие значения может принимать выражение $x^2 + y^2$? Ответ обоснуйте.

8.2 На доске были написаны четыре положительных числа. Максим подошёл к доске и написал на ней пятое число, равное сумме всех четырёх имеющихся. После этого к доске подошёл Антон и написал шестое число — сумму всех пяти чисел, написанных ранее. Оказалось, что полученные шесть чисел можно разбить на 3 пары так, что в каждой паре одно из чисел будет в 4 раза больше другого. Во сколько раз сейчас (т. е. после действий Антона) наибольшее число на доске больше наименьшего числа? Ответ обоснуйте.

8.3 Пусть L — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Точки M и N — середины отрезков AL и BL соответственно. Известно, что расстояние от точки M до стороны BC равно расстоянию от точки N до стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

8.4 В каждой клетке доски размера 2020 клеток $\times$ 2020 клеток лежит по монете. *Ходом* в клетку X называется операция переворачивания всех монет в клетках, стоящих в одной строке или одном столбце с клеткой X (включая и саму X). *Комбинацией* называется следующая операция: вначале отмечаются все клетки доски, в которых монета лежит орлом вверх, а затем делается по ходу в каждую отмеченную клетку. Докажите, что как бы ни лежали монеты в клетках доски первоначально, после последовательного осуществления двух комбинаций все монеты будут лежать вверх решкой.

8.5 На окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 18 синих точек. Какое наибольшее количество точек можно перекрасить в красный цвет так, чтобы не появилось ни одного

а) равностороннего треугольника, (3 балла)

б) прямоугольного треугольника, (4 балла)

в) равнобедренного треугольника, (7 баллов)

все вершины которого находятся в красных точках? Ответы обоснуйте.

9 КЛАСС

9.1 Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n. Функция $f(n)$ для каждого натурального n удовлетворяет равенству $f(n) = n \cdot s(n)$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots f(206)\ldots))}_{2020 \text{ раз}}$. Ответ обоснуйте.

9.2 На доске нарисован треугольник ABC. Биссектрисы углов треугольника ABC вторично пересекли его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Затем с доски стёрли всё, кроме точек A_1, B_1, C_1. С помощью циркуля и линейки восстановите исходный треугольник.

9.3 *Ключом* четырёхзначного натурального числа $\overline{abcd}$ назовём набор из пяти чисел $a+b, b+c, c+d, a+b+c$ и $b+c+d$, упорядоченный по неубыванию. (Например, для числа 4233 ключом является такая последовательность: 5, 6, 6, 8, 9.) Четырёхзначное число назовём *исключительным*, если никакое другое не имеет такой же ключ. Найдите количество исключительных четырёхзначных чисел. Ответ обоснуйте.

9.4 Пусть $0 \leqslant x \leqslant n$, где n — произвольное натуральное число. Докажите неравенство $|x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)| \leqslant \dfrac{n!}{4}$.

9.5 На окружности стоят n белых точек. Красный и Синий играют в следующую игру. На своем ходе игрок выбирает любую белую точку и красит её: Красный в красный цвет, а Синий — в синий. Ходят по очереди, до тех пор, пока все белые точки не окажутся окрашеными. После этого считают количество разноцветных пар соседних точек. Если оно больше $\dfrac{n}{2}$, побеждает Красный, если меньше $\dfrac{n}{2}$ — Синий, а если равно $\dfrac{n}{2}$, то результат игры — ничья. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если:

а) $n = 4$, начинает Красный? (1 балл)
б) $n = 1234$, начинает Синий? (5 баллов)
в) $n = 1234$, начинает Красный? (5 баллов)
г) $n = 1235$, начинает Красный? (3 балла)

Ответы обоснуйте.

10 КЛАСС

10.1 Натуральное число n таково, что любой многочлен степени n, удовлетворяющий одновременно равенствам $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$, удовлетворяет также и равенству $P(3) = P(-3)$. Найдите все такие числа n.

10.2 В окружность вписан двенадцатиугольник, длины сторон которого (в сантиметрах) последовательно равны 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2. Найдите радиус этой окружности.

10.3 Комплект кораблей для игры в «морской бой» состоит из одного линкора (прямоугольника 1×4), двух крейсеров (прямоугольников 1×3), трёх эсминцев (прямоугольников 1×2) и четырёх катеров (квадратов 1×1). Можно ли разместить два комплекта кораблей (любые два корабля не должны иметь общих точек)

а) в прямоугольнике 9×11 клеток; (2 балла)

б) в квадрате 10×10 клеток? (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

10.4 Найдите натуральное число n, удовлетворяющее двойному неравенству

$$n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{1\,000\,000}} < n + 1.$$

10.5 Над плоскостью порхают n светлячков ($n > 2$), занумерованных натуральными числами от 1 до n. Время от времени светлячки на эту плоскость садятся. Известно, что если на плоскости одновременно оказываются светлячки с номерами i и j, то расстояние между ними в этот момент составляет в точности $d_{i,j}$, где $d_{i,j} = d_{j,i}$ — некоторое вещественное положительное число, своё для каждой пары светлячков.

Пусть k — некоторое натуральное число. Существуют ли такое натуральное число $n > k$ и такие положительные числа $d_{i,j}$ ($1 \leqslant \ i < j \leqslant n$), что любые k или менее светлячков могут сесть на плоскость одновременно, а все n светлячков этого сделать не могут. Решите задачу в случае:

(а) $k = 2$; (1 балл)

(б) $k = 3$; (2 балла)

(в) $k = 4$; (6 баллов)

(г) $k = 5$. (5 баллов)

Ответы обоснуйте.

11 КЛАСС

11.1 Андрей выписал все натуральные числа, меньшие 2020, среди которых нет чисел делящихся на 3 и нет чисел делящихся на 5. Отличница Лиза решила посчитать произведение всех этих чисел. На какую цифру окончится результат, полученный Лизой, если она не ошибётся? Ответ обоснуйте.

11.2 В правильный тетраэдр вписали шар объёма 1. В каждый из четырёх трёхгранных углов пирамиды вписали по меньшему шару, касающемуся исходного. В каждый из четырёх трёхгранных углов снова вписали по ещё меньшему шару, каждый из которых снова касается ближайшего к нему шара. Так повторили бесконечное число раз. Найдите сумму объёмов всех вписанных шаров. Ответ обоснуйте.

11.3 Функция $f(x)$ определена для всех положительных рациональных чисел и удовлетворяет тождеству $f(xy) \equiv f(x) + f(y)$. Известно, что $f(1/2020) = 1$. Найдите

а) $f(2020)$; (2 балла)

б) $f(2019)$. (5 баллов)

11.4 Лицевая сторона плоскости — белая, а её изнанка — чёрная. Из плоскости вырезали треугольный лоскут ABC. Можно ли разрезать этот треугольник на не более чем три части, каждую перевернуть и так вшить изнаночной стороной наружу, чтобы получить на исходной белой плоскости чёрный треугольник ABC? Решите задачу для

а) прямоугольного треугольника; (1 балл)

б) остроугольного треугольника; (2 балла)

в) произвольного треугольника. (4 балла)

11.5 Единичкин и Десяткин при помощи Арбитра играют в следующую игру. У Арбитра имеется 9 карточек с цифрами 1, 2, …, 9. Арбитр делит все карточки на две (непустые) кучки и дает их игрокам: Десяткину и Единичкину. Затем каждый из игроков, посмотрев свои карточки, убирает какие-то из них. При этом игрок обязан оставить хотя бы одну карточку в своей кучке и имеет право не убирать ни одной. После этого Арбитр наудачу, не глядя, выбирает по одной оставшейся карточке из кучек Единичкина и Десяткина. Цифра с выбранной карточки из кучки Десяткина ставится в разряд десятков, из кучки Единичкина — в разряд единиц. Десяткин выигрывает, если так полученное двузначное число — простое, иначе выигрывает Единичкин.

а) Докажите, что если Единичкину выдано карточек больше, чем Десяткину, то он может гарантировать себе выигрыш (то есть он выигрывает вне зависимости от действий противника и случая: выбранной Арбитром пары карточек). (1 балл) б) Известно, что Единичкину выданы такие три карточки, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш. Какие у него карточки? Приведите все возможные варианты и докажите, что нет других. (2 балла)

в) В условиях пункта б) докажите, что Десяткин может играть так, что, как бы не играл соперник, вероятность выигрыша Десяткина будет не меньше $0,5$. (3 балла)

г) В условиях пункта б) докажите, что Единичкин может играть так, что, как бы не играл соперник, вероятность выигрыша Единичкина будет не меньше $0,5$. (3 балла)

д) Известно, что Единичкину выданы такие четыре карточки, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш. Может ли хотя бы один из игроков обеспечить себе (вне зависимости от действий соперника) вероятность выигрыша больше $0,5$? Ответ обоснуйте. (5 баллов)

XIX ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

2020 г., 08 — 09 февраля
г. Екатеринбург, Уральский федеральный университет, Институт математики и компьютерных наук

Решения задач

5 КЛАСС

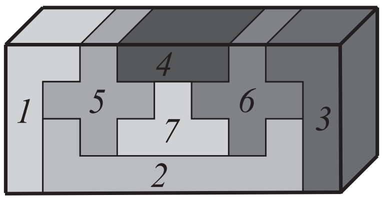
5.1 *На доске написано число. Первоклассник Максим сказал, что оно не больше* 2020*, первоклассник Валерий сказал, что оно не меньше* 2020*, а первоклассница Ангелина сказала, что оно равно* 2020*. Сколько среди этих высказываний могло быть верных? Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Если Ангелина сказала правду, и написанное число равно 2020, то правы все три первоклассника; в этом случае верных высказываний 3. Если же она солгала, то написанное число либо больше 2020 (в этом случае Валера прав, а Максим неправ), либо меньше (и тогда прав Максим, а Валера нет). В обоих случаях верное высказывание одно.

Ответ. Либо 1, либо 3.

5.2 *Отрезок разбили на* 5 *равных меньших отрезков. В каждом из маленьких отрезков отметили по точке и занумеровали точки последовательно (слева направо):* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5*. Выяснилось, что расстояние между точками* A_1 *и* A_2 *равно* 1 *см, а расстояние между точками* A_2 *и* A_3 *равно* 3 *см. Может ли расстояние между точками* A_4 *и* A_5 *оказаться равным* 10 *см? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть длины каждого из маленьких отрезков равны l. Тогда расстояние между любыми двумя соседними отмеченными точками не больше $2l$, а расстояние между точками A_1 и A_3 не меньше, чем l (так как отрезок A_1A_3 содержит внутри себя второй слева маленький отрезок). Так как точка A_2 лежит на отрезке A_1A_3, имеем $A_1A_3 = A_1A_2 + A_2A_3 = 1 + 3 = 4$. Таким образом, l не больше четырёх. Тогда $2l$ не больше 8, что не больше расстояния между точками A_4 и A_5. Поэтому последнее расстояние не может равняться 10.



К условию задачи 5.3

Ответ. Не могло.

5.3 *Юный строитель Стёпа желает выложить стенку из 7 деталей конструктора, как указано на рисунке. Детали он опускает последовательно, каждую строго вертикально, и после установки уже не сдвигает. Сколько существует разных допустимых последовательностей взятия деталей для выкладывания стенки? От-*

вет обоснуйте. (Все детали, даже те, которые имеют одинаковую форму, разного цвета, а значит — различны.)

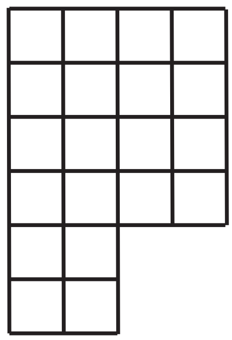
Решение. Будем говорить, что деталь A *предшествует* детали B (и писать $A \lhd B$), если при любой допустимой последовательности взятия деталей деталь A должна быть взята раньше. Это будет в случае, если какая-то часть детали A в стенке расположена ниже какой-то части детали B. Из определения предшествования следует транзитивность: если $A \lhd B$ и $B \lhd C$, то $A \lhd C$. Из рисунка стенки ясно, что $2 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 1$, $2 \lhd 7 \lhd 6 \lhd 3$, $5 \lhd 4$ и $6 \lhd 4$. Этими соотношениями описываются все ограничения на порядок взятия деталей. Видно, что первой деталью может быть только деталь 2 (она предшествует всем остальным), а следующей — только деталь 7. Третьей деталью может быть либо деталь 5, либо деталь 6. В силу симметрии стенки количество допустимых последовательностей в обоих случаях одинаково. Без ограничения общности считаем, что третья деталь — деталь 5. (Для получения окончательного ответа в конце следует полученное число последовательностей умножить на 2.) Итак, имеем, что детали 2, 7, 5, 6, 3 следуют именно в указанном порядке. Деталь 4 в этом ряду может стоять в двух местах: после 6 и после 3. В каждом из этих случаев деталь один может занять одно из четырёх мест: непосредственно после детали 5, непосредственно после детали 6, самое последнее место и предпоследнее. Получаем 8 последовательностей, в которых деталь 5 взята раньше детали 6, и столько же, когда деталь 6 взята раньше детали 5 — всего 16 способов.

Ответ. 16 способов.

5.4 *Бумажная фигура состоит из* 20 *клеток (см. рисунок). Покажите, как*

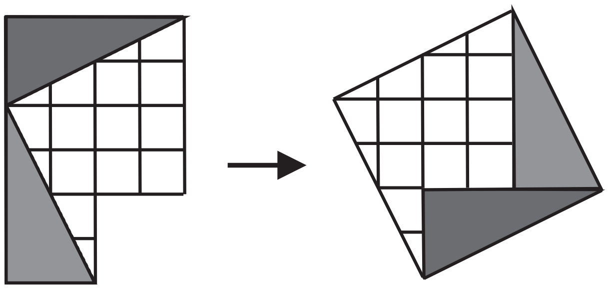
а) отрезать от данной фигуры 2 *равных треугольника и переложить их так, чтобы получить квадрат.*

б) отрезать от данной фигуры 3 *равных треугольника и переложить их так, чтобы получить прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой.*



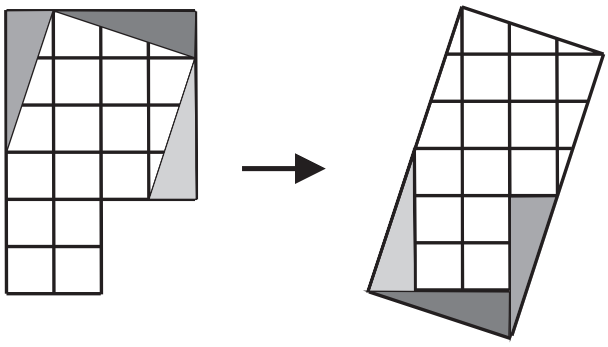
К условию задачи 5.4

Решение. а) См. рисунок



Решение 5.4 (а)

б) См. рисунок



Решение 5.4 (б)

5.5 *Андрей выписал все натуральные числа, меньшие* 2020, *которые не делятся на* 3 *и не делятся на* 5. *Отличница Лиза решила посчитать произведение всех этих чисел. На какую цифру окончится результат, полученный Лизой, если она не ошибётся? Ответ обоснуйте.*

Решение. За последнюю цифру произведения отвечают последние цифры сомножителей. Рассмотрим первые 30 натуральных чисел. Те, которые оканчиваются цифрой 5 или цифрой 0, Андреем не взяты (делятся на 5). Кроме того, не взяты числа 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 (как делящиеся на 3). Таким образом, среди последних цифр оставшихся нет нулей и пятёрок, а остальные цифры встречаются по 2 раза каждое (было по три, но одно вхождение выброшено). Числа, оканчивающиеся 1, в произведении дают последней цифрой 1, числа, оканчивающиеся 9 — тоже ($9{\cdot}9 = 81$), а числа, оканчивающиеся тройкой и семёркой «нейтрализуют» друг друга ($3 \cdot 7 = 21$). Значит, нечётные числа не влияют на последнюю цифру произведения. Остаются цифры 2, 4, 6, 8, по два экземпляра каждое. Их произведение оканчивается цифрой 6. Этой же цифрой оканчивается произведение первых 30 натуральных чисел, из которых выброшены числа, кратные 3 и 5.

Каждые последующие 30 натуральных чисел дают тот же набор последних цифр, поскольку числа n и $n+30$ либо одновременно взяты, либо одновременно выброшены. Так как произведение любого количества шестёрок оканчивается цифрой 6, эта цифра будет последней цифрой произведения всех выписанных Андреем чисел, которые не превосходят 2010 $(30 \cdot 67)$.

Остаётся учесть числа из отрезка $[2011; 2019]$. Из них Андреем выписаны 2011, 2012, 2014, 2017 и 2018. Произведение их последних цифр оканчивается на 8. Так как $6 \cdot 8 = 48$, на 8 оканчивается и произведение всех чисел, выписанных Андреем.

Ответ. На цифру 8.

6 КЛАСС

6.1 *Кирилл, Дмитрий, Даниил и Павел родились в один день, 8 марта. Если из возраста Кирилла вычесть возраст Дмитрия, добавить возраст Даниила и вычесть возраст Павла, то получится 6. Сколько получится, если из года рождения Кирилла вычесть год рождения Павла, добавить год рождения Даниила и вычесть год рождения Дмитрия? Ответ обоснуйте.*

Решение. Заметим, что разница в возрасте любых двух людей, родившихся в один день, равняется разности годов, в которые они родились, но взятую с противоположным знаком: если А старше Б на n лет, то он родился на n лет раньше, и год рождения A на n меньше, чем год рождения Б. Значит, год рождения Кирилла минус год рождения Павла есть возраст Павла минус возраст Кирилла. Аналогично год рождения Даниила минус год рождения Дмитрия есть возраст Дмитрия возраст Даниила. Тогда искомая величина получится, если из суммы возрастов Павла и Дмитрия отнять сумму возрастов Кирилла и Даниила. А это есть величина, противоположная той, которая дана в условии.

Ответ. -6.

6.2 *Буратино выбрал три последовательных натуральных числа. Для каждого выбранного числа он посчитал сумму его цифр и полученные три суммы перемножил. Произведение получилось равным 2020. Докажите, что Буратино ошибся в вычислениях.*

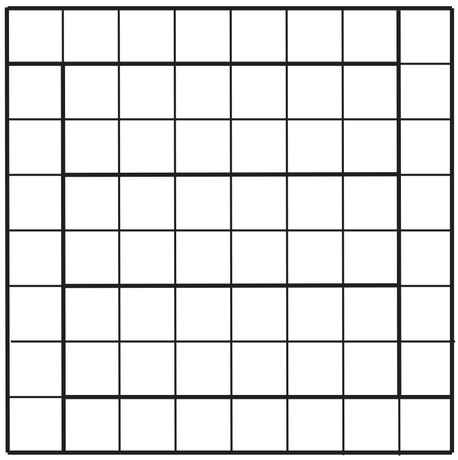
Решение. Среди любых трёх последовательных натуральных чисел есть одно, кратное трём. Сумма его цифр тогда тоже делится на 3 нацело. Значит, и произведение этой суммы на две другие должно делится на 3. Но 2020 нацело на 3 не делится. Следовательно, Буратино не мог его получить при безошибочном счёте.

6.3 *По кругу сидят 10 толстяков, все разные по толщине. Повар Пётр выбрал каких-то трёх толстяков, сидящих подряд, и дал самому тощему стейк. Повар Василий тоже выбрал каких-то трёх толстяков, сидящих подряд, и дал самому толстому стейк. Наконец, повар Михаил выбрал 5 толстяков, сидящих через одного, и дал по стейку самому тощему и самому толстому из них. Докажите, что ни один толстяк не получил больше двух стейков.*

Решение. Предположим противное: нашёлся толстяк, получивший хотя бы три стейка (назовём его Счастливчик). Тогда он получил их по одному от каждого из трёх поваров. Рассмотрим тройку, выбранную Петром. Если Счастливчик сидит в середине тройки, то каждый из его соседей толще его. Так как в любой тройке со Счастливчиком обязательно есть хотя бы один его сосед, Счастливчик не может быть в ней самым толстым, и не получит стейк от Василия. Остаётся единственный вариант: Счастливчик сидит с краю тройки, выбранной Петром (и тощее двух других) и одновременно с краю тройки, выбранной Михаилом (и толще двух других в этой тройке). Тогда в пятёрке толстяков, которые сидят через одного (таких пятёрок всего две, и Счастливчик попадает ровно в одну из них), Счастливчик не самый тонкий и не самый толстый. Значит, он не может получить стейк от Михаила. Противоречие.

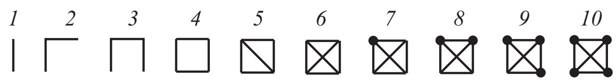
6.4 *Разрежьте квадрат* 1×1 *дм*^{2} *на* 7 *прямоугольников периметра* 2 *дм.*

Решение. Размеры сторон, точнее, масштаб, не имеют принципиального значения. На самом деле требуется разрезать квадрат на прямоугольники (в количестве 7 штук), периметр каждого из которых равен полупериметру квадрата. Для удобства возьмём квадрат со стороной 8 клеток (значит, одна клетка есть 1/8 дм). Полупериметр квадрата равен 16 (в клетках). Прямоугольники такого периметра — это, в частности, прямоугольники 1×7, 2×6, 3×5 и 4×4 (все размеры в клетках). Разрезать квадрат на 7 таких прямоугольников можно, например, так, как показано на рисунке.

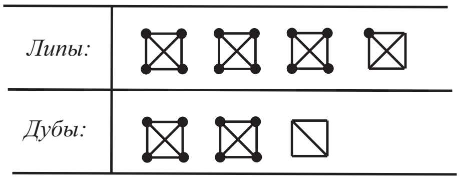


К решению задачи 6.4.

6.5 *Лесник при подсчёте количества деревьев вместо чисел рисует в блокноте «отрезки» или «кружочки» (каждый символ соответствует одному дереву), используя следующие обозначения для чисел:*



При этом деревья разных видов подсчитываются отдельно и записываются в разные строчки блокнота. Например, если лесник насчитает 37 *лип и* 25 *дубов, то у него в блокноте будет нарисовано вот так:*



Известно, что на лесном участке всего 2020 *деревьев. Лесник, пересчитав их, использовал* 1230 *«отрезков» и* 790 *«кружочков». Какое наименьшее количество видов деревьев могло быть на этом участке? Ответ обоснуйте.*

Решение. Способ 1. Досадим на участок деревья так, чтобы количество деревьев каждого вида было кратно 10, при этом деревьев каждого из видов посадим меньше 10 штук. Тогда если Лесник пересчитает деревья заново, у него в каждой строке будут только символы, соответствующие числу 10. При этом отношение числа «кружочков» к числу «отрезков» будет равно $6 : 4 = 1,5$. Заметим, что $1230 : 1,5 = 820$. Значит, к имеющимся 790 «кружочкам» должно быть добавлено, как минимум, 30 (это в случае, если «отрезков» не добавилось, в противном случае ещё больше). Так как к каждому виду деревьев мы не можем добавить больше 4 кружочков, видов деревьев должно быть, по крайней мере 8.

Покажем, что 8 видов возможно. Из анализа предыдущей ситуации мы видим, что количество деревьев каждого вида должно быть таким, чтобы к ним отрезки не добавлялись, то есть последняя цифра десятичной записи должна быть 6 или больше, а сумма всех восьми разностей вида «десять минус последняя цифра» должна равняться 30. Подойдёт набор из 7 шестёрок и одной восьмёрки (или из 6 шестёрок и двух семёрок). Общее число десятков (включая неполные) должно быть $1230 : 6 = 205$, так как на каждый десяток расходуется 6 отрезков. Любой такой вариант даст нужный пример участка. Годятся, скажем такие числа 246, 246, 246, 246, 246, 246, 247, 297.

Способ 2. Покажем, что без ограничения общности, можно считать, что «кружочки» присутствуют в записи только одного вида деревьев. Действительно, пусть есть два вида деревьев (скажем, сосны и кедры), в графах которых есть точки. Сначала предположим, что количество точек ни у одного вида не делится на 4. Рассмотрим участок, в котором мы заменили одну сосну кедром. Отличие в записи будет только в том, что последний «кружок» в графе сосны перейдёт в графу «кедры», а общее число «отрезков» и «кружочков» не изменится. Если по-прежнему ни у одного из видов количество «кружочков» не кратно 4, то повторим операцию. Максимум за три шага получим запись, в которой число «кружочков» у какого-то вида (пусть у сосен) кратно 4. Все эти точки обязаны находятся в группах символов, соответствующих числу 10. Значит, сосен не меньше 10. Рассмотрим новый участок, который получится, если заменить каждые 10 сосен на 10 кедров. В записи лесника для этого участка «отрезки» и «кружочки» будут в том же количестве, просто несколько групп символов, соответствующих числу 10, перенесутся из графы «сосны» в графу «кедры» Но теперь в графе «сосны» «кружочков» нет. Утверждение доказано.

Итак все «кружочки» относятся к одному виду деревьев, пусть к кедрам. Тогда, так как каждые 4 «кружочка» завершают очередной десяток, а $790 = 4 \cdot 197 + 2$, кедров будет 197 десятков и ещё 8, всего 1978 кедров. Останется ещё $2020 - 1978 = 42$ дерева других видов. Но каждый из других видов содержит не более 6 деревьев, иначе в его записи неизбежно появятся «кружочки», а мы приняли, что их нет. Значит других видов не больше 7, а всего видов 8.

Из рассуждения следует пример участка, содержащего 8 видов деревьев: 1978 деревьев одного вида и 7 групп по 6 деревьев семи других видов. Пример, конечно, не единственный.

Ответ. 8 видов.

7 КЛАСС

7.1. *Две бригады рабочих, А и Б, строили стратегический объект. Каждая бригада работает со своей постоянной скоростью: бригада А может справиться со строительством за* 12 *дней работы, а бригада Б — за* 36 *дней. На самом деле бригада Б приступила к работе на* 4 *дня позже бригады А, да ещё и отдыхала по одному дню через каждые два дня работы. Бригада А ушла в отпуск одновременно с первым выходным бригады Б и больше не возвращалась. За сколько дней (с учётом выходных) был построен стратегический объект? Ответ обоснуйте.*

Решение. Из условия следует, что бригада А проработала ровно 6 дней, т. е. построила половину объекта. Тогда у бригады Б было ровно 18 рабочих дней. График её работы подразумевает $18 : 2\breve{}1 = 8$ выходных. Таким образом, объект был построен за $4 + 18 + 8 = 30$ дней.

Ответ. 30 дней.

7.2. *Коля хотел перемножить все натуральные числа от* 1 *до своего возраста включительно, но по невнимательности пропустил два числа. У него получилось* 1 900 800*. Сколько лет Коле? (Укажите все возможности и докажите, что других нет).*

Решение. Заметим, что $10! = 3\,628\,800$ отличается от полученного числа менее, чем в два раза, а Коля пропустил два множителя, т. е. получил ответ по крайней мере в два раза меньший нужного факториала. Число $9! = 362\,880$ меньше полученного произведения. Если бы Коля пытался получить число 12! или большее, то даже пропустив два наибольших множителя, получил бы произведение, не меньшее числа 10!. Таким образом, единственный подходящий вариант — число 11!, т. е. Коле 11 лет.

Сделаем проверку: $11! = 39916800$. Это число в 21 раз больше числа 1 900 800, т. е. Коля пропустил множители 3 и 7.

Ответ. Коле 11 лет.

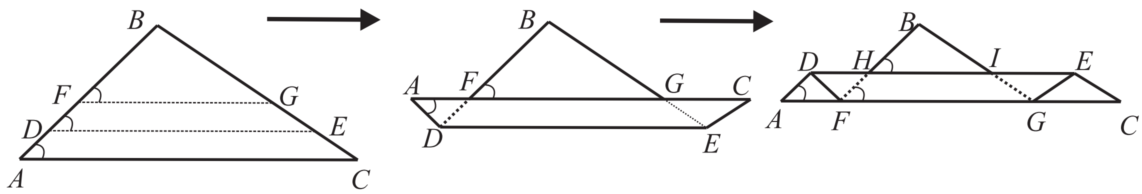
7.3. *По кругу стоят* 2020 *натуральных чисел. Известно, что сумма любых трёх стоящих подряд чисел равна сумме следующих за ними по часовой стрелке трёх стоящих подряд чисел. Одно из чисел равно* 2020*. Какие значения могут принимать числа, стоящие рядом с ним справа и слева? Ответ обоснуйте.*

Решение. Возьмём произвольное число на круге, обозначим его за a_1, и занумеруем все остальные числа по часовой стрелке от a_2 до a_{2020} соответственно. Тогда выполняются равенства: $a_2+a_3+a_4 = a_5+a_6+a_7 = \ldots = a_{2018}+a_{2019}+a_{2020} = a_1+a_2+a_3$ (индексы такие, так как 4, 7, …, 2020 дают остаток 1 при делении на 3). Из этого равенства получаем $a_1 = a_4$. Далее, применим аналогичное рассуждение для a_4, потом для a_7 и т. д. В итоге $a_1 = a_4 = a_7 = \ldots = a_{2020}$, т. е. два соседних числа на круге — числа a_1 и a_{2020} — равны. Ввиду произвольности выбора числа a_1, мы доказали, что любые два соседних числа равны. Но тогда соседними с числом 2020 могут быть только числа 2020.

Ответ. С обеих сторон стоит число 2020.

7.4. *У Пети есть бумажный треугольник. Он может согнуть его дважды, каждый раз вдоль некоторой прямой линии. Ему необходимо получить многоугольник (возможно невыпуклый), для каждой стороны которого найдётся параллельная ей другая сторона. Всегда ли Петя может этого добиться? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть данный треугольник — ABC, причём AC — его большая сторона. Тогда его углы $\angle A$ и $\angle C$ — заведомо острые, так как $\angle B$ — наибольший угол треугольника. Выберем на сторонах AB и BC точки D и E так, чтобы прямые AC и DE были параллельны, а расстояние между ними было «маленьким», меньше половины высоты треугольника, опущенной на сторону AC. Ещё отложим на сторонах AB и BC отрезки $DF = DA$ и $EG = EC$; при этом прямая FG будет параллельна прямым AC и DE. Согнём треугольник последовательно по отрезкам DE и FG — см. рисунок.



По причине остроты углов все сгибы окажутся внутри нижней трапеции $ADEC$, а по причине малости расстояния между линиями сгиба и стороной AC точка B будет лежать вне этой трапеции. Получим семиугольник $ADHBIEC$, у которого сторона AC будет параллельна сторонам DH и E, лежащим на прямой DE. Докажем, что сторона DA будет параллельна стороне BH (и аналогично $CE \parallel BI$); этого достаточно для обоснования того, что полученный многоугольник — требуемый. Действительно, $\angle DAC = \angle BFG$, как соответственные при параллельных прямых

AC и FG и секущей AB. Но после двух сгибаний они становятся соответственными при прямых AD и BH и секущей AC. Тогда прямые AD и BH параллельны. Утверждение доказано.

Ответ. Всегда.

7.5 *Школьники написали несколько контрольных работ, оценки за которые могут принимать значения* 1, 2, 3, 4, 5. *Известно, что никакие два школьника не написали контрольные одинаково (т. е. хотя бы за одну из контрольных их оценки различаются). Будем говорить, что один школьник успешнее другого, если на каждой контрольной он получил оценку выше другого (оценки за разные контрольные не сравниваются).*

а) Школьники написали две контрольные работы. Может ли оказаться так, что среди 9 *школьников нет двоих, один из которых успешнее другого?*

б) Докажите, что если контрольных работ было две, то среди любых 10 *школьников всегда найдутся найдутся двое, один из которых успешнее другого.*

в) Докажите, что если контрольных работ было две, то среди любых 17 *школьников всегда найдутся трое таких, что один из них успешнее второго, а второй — третьего.*

г) Пусть школьники написали три контрольные работы. При каком наименьшем количестве школьников можно утверждать, что наверняка найдутся двое, один из которых успешнее другого?

Ответы обоснуйте.

Решение. а) Оценки за две контрольные будем обозначать с помощью скобок $(a;\, b)$, где a — оценка за первую контрольную, b — за вторую. Пусть каждый из 9 школьников получит хотя бы одну единицу — из-за единиц никто из них не может быть успешнее кого-либо. Всего есть ровно 9 способов получить хотя бы одну единицу: $(1;\, 1), (1;\, 2), (1;\, 3), (1;\, 4), (1;\, 5), (2;\, 1), (3;\, 1), (4;\, 1), (5;\, 1)$. Именно эти девять вариантов оценок и выставим школьникам.

б) Назовём указанные в пункте а) девять способов *базовыми* оценками. Назовём *понижением* школьника следующую операцию: все его оценки уменьшим на 1 балл. Разумеется, если школьник получил хотя бы одну единицу, понижение к нему применить нельзя, а если нет, то понижая школьника (возможно, несколько раз) мы приведём его оценки к одной из базовых. Так как базовых оценок — девять, а школьников — 10, то при этом хотя бы два школьника получат одинаковую базовую оценку. Тогда тот из них, чью оценку понижали большее число раз, успешнее второго.

в) Также, как в пункте б) сведём операцией понижения оценки всех 17 школьников к базовым оценкам. Так как базовые оценки (1; 5) и (5; 1) невозможно получить понижением, то не менее $17 - 2 = 15$ школьников получат одну из 7 оставшихся базовых оценок. По принципу Дирихле найдутся три школьника с одинаковой базовой оценкой. Тот, из них, кого понижали меньшее количество раз, успешнее обоих других. В свою очередь тот из двух оставшихся, кого понижали меньше, успешнее третьего.

Заметим, хотя этого в задаче и не требуется, что если школьников 16 (тем более, если меньше), требуемой тройки может не найтись. Действительно, если к 9 школьникам из пункта а) добавить ещё 7 школьников, чья минимальная оценка за контрольные равна 2 (а таких может быть 7 с оценками $(2;\,2), (2;\,3), (2;\,4), (2;\,5), (3;\,2), (4;\,2), (5;\,2)$), указанной тройки не найдётся. Действительно, взятые в начале 9 школьников не могут быть успешнее никого, так как имеют единицу за одну из контрольных. Любой из 7 добавленных школьников имеет двойку, потому может быть успешнее только того, кто изначально имеет хотя бы одну единицу, а этот последний не может быть успешнее никого другого.

г) Теперь базовыми оценками будем считать тройки чисел, среди которых есть единица. Их количество равно 53˘43 = 125˘64 = 61 (все тройки минус тройки без единиц). Пусть все школьники получают базовые оценки. Тогда никто из них не успешнее никого другого, так как имеет единицу среди оценок. Такая ситуация нас не устраивает, следовательно, школьников должно быть не менее 62. Если же есть хотя бы 62 школьника, то после всех возможных понижений школьников по принципу Дирихле найдутся двое с одинаковой оценкой. Тогда тот из них, которого понижали большее количество раз, успешнее другого.

Ответ. а) может; г) 62 школьника.

8 КЛАСС

8.1 *Числа x, y удовлетворяют равенствам*

$$x + 4 = (y - 2)^2, \qquad y + 4 = (x - 2)^2.$$

Какие значения может принимать выражение $x^2 + y^2$? Ответ обоснуйте.

Решение. Вычтем левые и правые части имеющихся равенств. Получим

$$x - y = (y - 2)^2 - (x - 2)^2$$

$$x - y = (y - x)(y + x - 4)$$

$$(x - y)(1 + y + x - 4) = 0$$

$$x = y \qquad \text{или} \qquad x + y = 3.$$

Подставим в каждом случае y в одно из первоначальных равенств:

$y = x \Rightarrow x + 4 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 5$. В этом случае имеем две пары решений (0; 0) и (5; 5) Соответственно $x^2 + y^2 = 0$ или $x^2 + y^2 = 50$.

$y = 3 - x \Rightarrow 3 - x + 4 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. Получаем ещё две пары: $\left(\dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}; \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}; \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)$. Для обеих пар

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{9 + 6\sqrt{21} + 21}{4} + \frac{9 - 6\sqrt{21} + 21}{4} = 15.$$

Ответ. 0, 50 или 15.

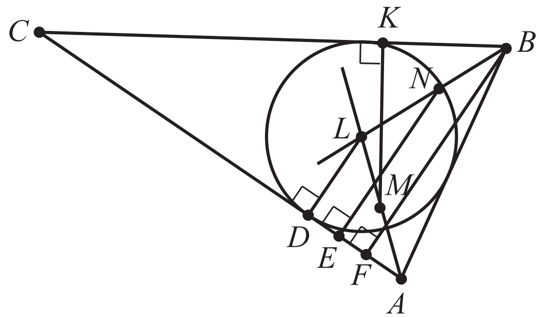
8.2 *На доске были написаны четыре положительных числа. Максим подошёл к доске и написал на ней пятое число, равное сумме всех четырёх имеющихся. После этого к доске подошёл Антон и написал шестое число — сумму всех пяти чисел, написанных ранее. Оказалось, что полученные шесть чисел можно разбить на 3 пары так, что в каждой паре одно из чисел будет в 4 раза больше другого. Во сколько раз сейчас (т. е. после действий Антона) наибольшее число на доске больше наименьшего числа? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть сумма всех четырёх написанных чисел равна S. Тогда Антон написал число S, а Максим — число $2S$. Эти два числа — наибольшие из записанных

6 чисел, так как все записанные числа положительны. По условию задачи среди записанных чисел есть два таких, которые вдвое меньше чисел, записанных Максимом и Антоном, то есть там присутствуют числа $\frac{S}{4}$ и $\frac{S}{2}$. На остальные два числа остаётся в сумме $S-\frac{S}{4}-\frac{S}{2}=\frac{S}{4}$ и одно из них в 4 раза больше другого. Пусть меньшее из этих двух чисел равно x. Тогда большее равно $4x$. Из уравнения $x+4x=\frac{S}{4}$ находим, что $x=\frac{S}{20}$, $4x=\frac{S}{5}$. Итого, сейчас на доске такие числа (в порядке возрастания): $\frac{S}{20}$, $\frac{S}{5}$, $\frac{S}{4}$, $\frac{S}{2}$, S и $2S$. Отношение наибольшего из них к наименьшему равно $2S:\frac{S}{20}=40$.

Ответ. В 40 раз.

8.3 *Пусть L — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Точки M и N — середины отрезков AL и BL соответственно. Известно, что расстояние от точки M до стороны BC равно расстоянию от точки N до стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.*



К решению задачи 8.3

Решение. Пусть MK и NE — отрезки, реализующие расстояния от точки M до прямой BC и от точки N до прямой AC соответственно ($MK \perp BC$ и $NE \perp AB$). Опустим на прямую AC перпендикуляры из точек B и L — отрезки BF и LD соответственно (см. рисунок.) Получим прямоугольную трапецию $BLDF$, в которое проведена средняя линия NE. Значит, $NE=\frac{BF+LD}{2}$. При этом $BF=h_B$ — высота треугольника ABC, опущенная из точки B, а $LD=r$ — радиус вписанной в треугольник окружности, поскольку точка L — точка пересечения биссектрис треугольника — является центром этой окружности. Отсюда $h_B=2NE-r$. Аналогично, $h_A=2MK-r$. Так как по условию $NE=MK$, имеем $h_A=h_B$, т. е. в треугольнике ABC две высоты равны. Значит, треугольник равнобедренный.

8.4 *В каждой клетке доски размера 2020 клеток $\times$ 2020 клеток лежит по монете. Ходом в клетку X называется операция переворачивания всех монет в клетках, стоящих в одной строке или одном столбце с клеткой X (включая и саму X).*

Комбинацией называется следующая операция: вначале отмечаются все клетки доски, в которых монета лежит орлом вверх, а затем делается по ходу в каждую отмеченную клетку. Докажите, что как бы ни лежали монеты в клетках доски первоначально, после последовательного осуществления двух комбинаций все монеты будут лежать вверх решкой.

Решение. Рассмотрим произвольную клетку X таблицы и лежащую в ней монету. Будем называть клетки и монеты, находящиеся с X в одном столбце или в одной строке *близкими*, а остальные клетки и монеты — *далёкими* (саму клетку X тоже считаем близкой). Обратим внимание, что лежащая в X монета в результате комбинации будет перевёрнута в том и только том случае, если в близких к ней клетках нечётное количество монет, лежащих орлом вверх (для краткости в дальнейшем будем называть такие монеты *орлами*). Также заметим, что каждая далёкая клетка с орлом в результате комбинации изменит состояние ровно двух близких к X монет (но не самой монеты, лежащей в X), а клетка с решкой вообще ничего не поменяет. Значит, далёкая клетка не повлияет на чётность количества близких к X орлов, значит, не повлияет на монету в клетке X при дальнейших комбинациях. Поэтому при определении состояния монеты в клетке X можно считать, что далёких клеток просто нет. Есть только один столбец и одна строка, пересекающиеся по клетке X. Рассмотрим комбинации на такой доске. Возможны несколько случаев.

1) Общее количество орлов на доске чётно. Тогда при первой комбинации состояние монеты в клетке X не поменяется.

1.1) В X орла нет. Тогда либо и в строке и в столбце чётное число орлов (и тогда ни одна монета при первой комбинации не будет перевёрнута), либо их там и там нечётно. В этом последнем случае после первой комбинации их и в строке, и в столбце станет чётно: если в строке (столбце) было n орлов, то теперь станет $7 - n$ (все монеты строки (столбца), которые не были раньше орлами и не лежали в клетке X). Вторая комбинация тогда не изменит состояние ни одной монеты.

1.2) В X орёл. Тогда либо в строке чётное число орлов, а в столбце нечётно, либо наоборот. В силу равноправия строк и столбцов случаи неразличимы, пусть в строке орлов чётно. Тогда монеты в строке состояние не меняют, в столбце состояние меняют все, кроме монеты в клетке X. Число орлов становится нечётным и при второй комбинации монета в клетке X меняет своё состояние.

2) Общее количество орлов на доске нечётно. Тогда при первой комбинации состояние монеты в клетке X поменяется.

2.1) В X орла нет. Аналогично случаю 1.2 можно считать, что в строке чётное число орлов, а в столбце нечётное. Тогда при первой комбинации меняют состояние все 8 монет столбца и только они. Число орлов на доске останется при этом нечётным, и при второй комбинации монета в клетке X будет перевёрнута.

2.2.) В X орёл. Тогда либо и в строке и столбце орлов чётно, либо там и там нечётно. В первом случае в результате первой комбинации ни одна монета (кроме лежащей в X) состояние не изменит. Во втором — состояние изменят все монеты доски. Но в любом случае общее число орлов на доске окажется чётным и при второй комбинации состояние монеты X не изменится.

Вывод: во всех случаях после двух комбинаций в клетке X орла не будет. В силу произвольности клетки X на доске орлов не будет совсем. Утверждение доказано.

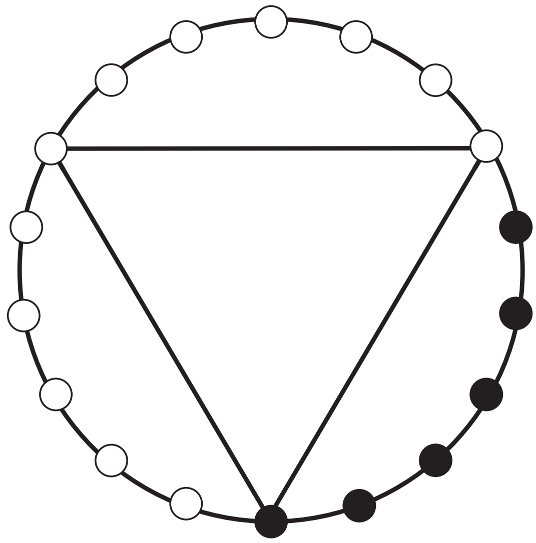
8.5 *На окружности на равных расстояниях друг от друга стоят* 18 *синих точек. Какое наибольшее количество точек можно перекрасить в красный цвет так, чтобы не появилось ни одного*

а) равностороннего треугольника,

б) прямоугольного треугольника,

в) равнобедренного треугольника,

все вершины которого находятся в красных точках? Ответы обоснуйте.



К решению задачи 8.5 а

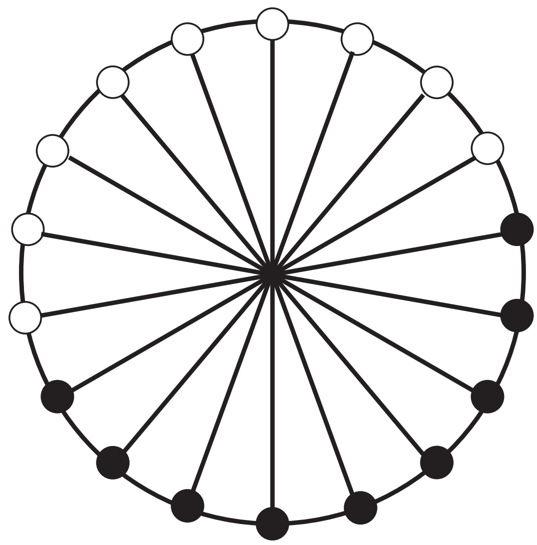
Решение. а) Равносторонних треугольников с вершинами в синих точках ровно 6 (см. рисунок, на нём один треугольник нарисован, остальные получаются из него поворотом вокруг центра окружности) и никакие два таких треугольника не имеют общих вершин. Следовательно, мы можем перекрасить в красный цвет по две вершины каждом таком треугольнике (всего 12 точек, на рисунке они белые) — красных равносторонних треугольников при этом не возникнет.

Если же мы покрасим в красный цвет 13 или более точек, то по принципу Дирихле все три точки какого-то из 6 треугольников будут красными, чего мы допустить не имеем права. Значит, ответ на пункт а) — число 12.

б) Заметим, что треугольник с вершинами в отмеченных точках прямоугольный тогда и только тогда когда две его вершины противоположны (отрезок, их соединяющий, является диаметром окружности).

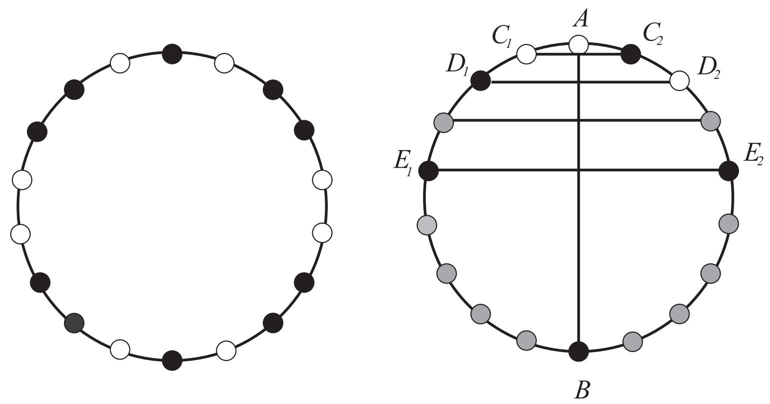
Покрасим в красный цвет девять последовательных точек (можно вместо этого выбрать произвольно по точке каждого из девяти диаметров — см. рисунок). Так среди перекрашенных точек нет диаметрально противоположных, красных прямоугольных треугольников не возникнет.

Докажем, что 10 (тем более больше десяти) точек перекрасить в красный цвет нельзя. Действительно, пусть какие-то 10 точек перекрашены в красный цвет. Тогда (поскольку всего диаметров 9, а красных точек 10) найдётся диаметр AB, оба конца которого находятся в красных точках. Следовательно, для любой третьей красной точки C треугольник ABC прямоугольный (AB — гипотенуза) с красными вершинами. Утверждение доказано. Значит, ответ на пункт а) — число 9.



К решению задачи 8.5 б

в) На рисунке слева показано, как можно покрасить в красный цвет 8 точек так, чтобы не появилось ни одного равнобедренного треугольника с вершинами в красных точках. Докажем, что 9 (а тем более, больше девяти) точек покрасить в красный цвет нельзя. Предположим противное, что 9 точек покрашены в красный цвет. Тогда в силу нечётности количества красных точек найдется диаметр AB такой, что точка A — красная, а точка B — синяя. Все остальные точки разобъём на пары (см рисунок) точек, симметричных относительно диаметра AB.



К решению задачи 8.5 в

Обе точки в каждой из пар не могут быть красными — иначе треугольник с вершинами в этих двух точках и в точке A — красный равнобедренный. Если в некоторой паре обе точки синие, то на остальные семь пар приходится 8 красных точек и по принципу Дирихле есть пара состоящая из красных точек — противоречие. Итак, в каждой паре одна точка красная, вторая — синяя. Рассмотрим точки C_1 и C_2 соседние с A. Без ограничения общности C_1 — красная, C_2 — синяя. Рассмотрим ближайшую пару к C_1C_2 — пару D_1D_2. Из равнобедренного треугольника AC_1D_1 получаем, что D_1 — синяя, тогда D_2 красная. Следующую пару пропустим, и рассмотрим пару E_1E_2, следующую за пропущенной. Из треугольника $E_1C_1D_2$ получаем, что E_1 — синяя; из треугольника AD_2E_2 — что E_2 синяя. Но обе точки в паре синими быть не могут. Противоречие.

Ответ. а) 12; б) 9; в) 8.

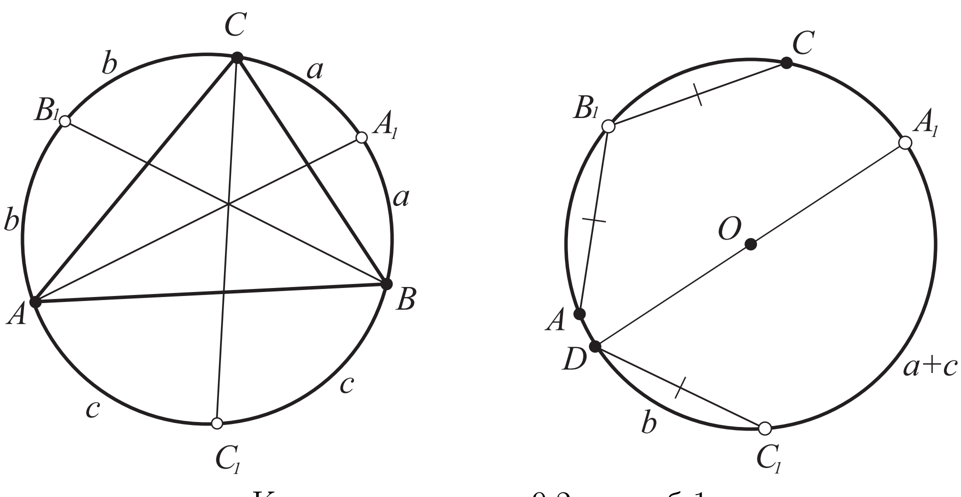
9 КЛАСС

9.1 *Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n. Функция $f(n)$ для каждого натурального n удовлетворяет равенству $f(n) = n \cdot s(n)$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots f(206)\ldots))}_{2020\ \text{раз}}$. Ответ обоснуйте.*

Решение. $f(206) = 206 \cdot 8 = 1648$; $f(f(206)) = f(1648) = 1648 \cdot 19 = 31312$. Сумма цифр полученного числа равна 10, поэтому следующее число получится из предыдущего приписыванием в конец нуля, и сумма цифр при этом не изменится. И этот процесс будет идти до бесконечности. Значит, $f(f(f(206))) = 313120$; $f(f(f(f(206)))) = 3131200$, $\ldots$, $\underbrace{f(f(\ldots f(206)\ldots))}_{2020\ \text{раз}} = 31312 \cdot 10^{2018}$.

Ответ. $31312 \cdot 10^{2018}$.

9.2 *На доске нарисован треугольник ABC. Биссектрисы углов треугольника ABC вторично пересекли его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Затем с доски стёрли всё, кроме точек A_1, B_1, C_1. С помощью циркуля и линейки восстановите исходный треугольник.*



К решению задачи 9.2, способ 1

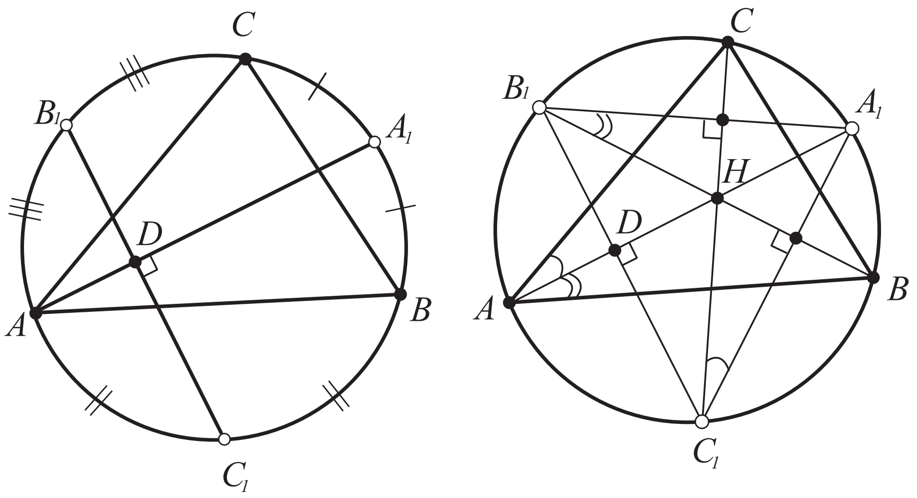
Решение (способ 1.) Заметим, что углы BAA_1 и CAA_1 равны и вписаны в окружность, поэтому равны и дуги, которые они на этой окружности высекают (обозначим угловые величины этих дуг через a — см. рисунок.) Аналогично равны дуги

CB_1 и AB_1 (пусть их угловые величины b), а также AC_1 и BC_1 (угловая величина c). Тогда $2a+2b+2c = 360°$, поскольку указанные 6 дуг составляют все окружность, откуда $a+b+c = 180°$.

Пусть теперь на доске есть только точки A_1, B_1, C_1. Опишем окружность около треугольника $A_1B_1C_1$ — это стандартная школьная задача. Проведём диаметр в этой окружности, например, через точку A_1 — отрезок A_1D. Тогда дуга $A_{11}D$ равна $180° = a+b+c$. Поскольку дуга $A_{11} = A_1B + BC_1 = a+c$, на дугу C_1D останется ровно b градусов. Значит, дуга C_1D равна дугам B_1A и B_1C. Отложив по разные стороны от точки B_1 эту дугу, найдём положение точек A и C — см. рисунок. Теперь точка B находится без труда разными способами. Например, можно отложить дугу A_1C от точки A_1 в противоположную сторону.

Решение (способ 2.)

Анализ. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и продолжим его биссектрису AD до пересечения с описанной окружностью в точке A_1. Дуги CA_1 и BA_1 будут равны, так как на них опираются равные вписанные углы CAA_1 и BAA_1. Аналогично продлим две другие биссектрисы и отметим ещё две пары равных дуг — см. рисунок. Хорды AA_1 и B_1C_1 пересекаются под углом, равным полусумме дуг AB_1 и A_1C_1, причём $A_1C_1 = A_1B + A_1C$. Но эти дуги составляют ровно половину всей окружности, так как в каждой из указанных трёх пар равных дуг одна дуга входит в указанную сумму, а вторая — нет. Значит, сумма указанных дуг равна $180°$, а $\angle A_1DC_1 = 90°$, то есть биссектриса угла A перпендикулярна стороне B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично $BB_1 \perp A_1C_1$ и $CC_1 \perp A_1B_1$.



К решению задачи 9.2, способ 2

Построение. Треугольник $A_1B_1C_1$ и описанная около него окружность легко строятся. Проведём в треугольнике $A_1B_1C_1$ высоты и продолжим их до пересечения с описанной окружностью. Точки пересечения и будут вершинами исходного треугольника.

Доказательство. $\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$ и $\angle BAA_1 = BB_1A_1$, поскольку эти углы вписаны и опираются на одну и ту же дугу. Но

$$\angle CC_1A_1 = \angle HC_1A_1 = 90^\circ - \angle C_1HB = 90^\circ - B_1HC = \angle HB_1A_1 = \angle BB_1A_1,$$

поэтому $\angle CAA_1 = \angle BAA_1$, то есть луч AA_1 действительно биссектриса угла BAC. Аналогично показывается, что лучи BB_1 и CC_1 — биссектрисы двух других углов треугольника ABC. Значит, треугольник ABC требуемый.

Исследование. Все проведённые построения возможны и однозначны. Поэтому если треугольник $A_1B_1C_1$ — остроугольный, то решение задачи строго единственно. Если же не остроугольный, то треугольника ABC не существует.

9.3 *Ключом четырёхзначного натурального числа $\overline{abcd}$ назовём набор из пяти чисел $a+b, b+c, c+d, a+b+c$ и $b+c+d$, упорядоченный по неубыванию. (Например, для числа* 4233 *ключом является такая последовательность:* 5, 6, 6, 8, 9.*) Четырёхзначное число назовём исключительным, если никакое другое не имеет такой же ключ. Найдите количество исключительных четырёхзначных чисел. Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть $X = \overline{abcd}$ — исключительное число. Рассмотрим число $Y = \overline{dcba}$. Легко видеть, что ключи чисел X и Y одинаковы. Значит, либо $X = Y$, либо числа Y не существует (это возможно тогда и только тогда, когда $d = 0$). Разберём обе ситуации.

I. $X = Y$. Тогда $a = d$, $b = c$ и $X = Y = \overline{abba}$ (такие «симметричные» чила называют *палиндромами*). Рассмотрим число $Z = \overline{babb}$. Непосредствнной проверкой убеждаемся, что ключи чисел X и Z одинаковы. Снова возникают два случая.

I.I. $X = Z$, т. е. $a = b$. Тогда его ключ — это последовательность $2a$, $2a$, $2a$, $3a$, $3a$. Покажем что по ключу такого вида число восстанавливается однозначно (этим будет доказано, что все числа вида $\overline{aaaa}$ — исключительные). Пусть некоторое число $P = \overline{klmn}$ имеет такой ключ. Число $l + m$ равно либо $2a$, либо $3a$. В последнем случае k обязано равняться 0 (иначе $k + l + m > 3a$, а все числа в ключе числа $3a$ не превосходят) — противоречие, так как k — первая цифра числа P. Итак, $l + m = 2a$. Тогда $k + l + m > 2a$, значит, $k + l + m = 3a$ и $k = a$. Тогда если $k + l = 3a$, то $l = 2a$, $m = 0$. Тогда обе суммы $m + n = n$ и $l + m + n = 2a + n$ должны равняться $2a$, что невозможно. Остаётся вариант $k + l = 2a$, тогда $k = l = m = a$ и для получения второй суммы $3a$ число n также должно равняться a. Значит, $P = \overline{aaaa}$. Мы нашли 9 исключительных чисел: 1111, 2222, ..., 9999.

I.II. Числа Z не существует (т. е. $b = 0$ и $X = \overline{a00a}$.) Покажем, что все такие числа исключительные. Действительно, пусть число $P = \overline{klmn}$ имеет ключ 0, a, a, a, a — ключ числа X. Числа $k + l + m$ и $l + m$ различны, так как $k \neq 0$, значит $l + m = 0$, $k + l + m = a$. Отсюда $l = m = 0$, $k = a$, $m + n = a$, $n = a$ и $P = X$. Нашли ещё 9 исключительных чисел.

II. $d = 0$, $X = \overline{abc0}$. Пусть сначала $a < c$. Рассмотрим число $Y = \overline{(c-a)abc}$. Оно заведомо существует и отлично от числа X: иначе сравнивая цифры последних разрядов, последовательно получим $c = 0$, $b = c = 0$ и $a = b = c = 0$ — противоречие. Непосредственно проверяются, что ключи чисел X и Y одинаковы. Значит, в этом случае X не является уникальным. Противоречие.

Пусть теперь $a \geqslant c$. Рассмотрим число $Z = \overline{(a+b)0cb}$. Оно имеет тот же ключ, что и X, поэтому возникают снова две возможности.

II.I. $X = Z$. Тогда $a = a + b$, $b = 0$ и $X = Z = \overline{a0c0}$ (по-прежнему $a \geqslant c$). Покажем, что все такие числа уникальны. Пусть некоторое число $P = \overline{klmn}$ имеет ключ c, c, c, a, $a + c$. Рассмотрим число $l + m$. Оба числа $k + l + m$ и $l + m + n$ не меньше его, поэтому $l + m = c$. Наибольшее число ключа всегда есть сумма трёх цифр, поэтому либо $k + l + m = a + c$ (и тогда $k = a$), либо $l + m + n = a + c$ (и тогда $n = a$). Пусть первое. Тогда $k + l \geqslant a$, а так как число $a + c$ уже занято (это сумма $k + l + m$), то $k + l = a$, откуда $l = 0$, и $m = c$. Тогда $n = 0$ и $P = X$. Второй подслучай ($l + m + n = a + c$) аналогичным рассуждением приводит к равенству $k = 0$, что невозможно.

Чисел вида $\overline{a0c0}$, где $a \geqslant c$ всего $2+3+\ldots+9 = 54$, и мы нашли ещё 54 уникальных числа. (Заметим, что в этот класс входят и все числа вида $\overline{a000}$.)

II.II.Числа $Z = \overline{(a+b)0cb}$ не существует, то есть $a + b \geqslant 10$. (По-прежнему, $X = \overline{abc0}$, $a \geqslant c$.) Тогда ключ числа X — это последовательность c, $b + c$, $b + c$, $a + b$, $a + b + c$. Покажем, что по такому ключу число X восстанавливается однозначно. Действительно, пусть число $P = \overline{klmn}$ имеет указанный ключ. Заметим, что $(k+l)+(l+m)+(m+n) = (k+l+m)+(m+l+n)$, поэтому те два числа ключа, сумма которых равняется сумме трёх остальных, являются суммами трёх цифр числа P. Так как $(a+b+c)+(b+c) = (b+c)+(a+b)+c$, одна из троек $\overline{klm}$ и $\overline{lmn}$ имеет сумму цифр, равную $a+b+c$, вторая — равную $b+c$. Пусть сначала $l+m+n = b+c$. Тогда каждая из сумм $m+n$ и $l+m$ не больше $b+c$, поэтому одна из них равна $b+c$ (а вторая равна c). Тогда либо $l = 0$, либо $n = 0$. Для суммы $k + l$ остаётся единственный вариант: сумма $a+b$, которая не меньше 10. Значит, $l \neq 0$. Тогда $n = 0$, и из условия $m+n = c$ получаем, что $m = c$, а тогда $l = b$. Теперь из равенства $k+l = a+b$ получаем $k = a$, т. е. $P = X$. Если же $k + l + m = b + c$, то аналогичными рассуждениями приходим к числу $\overline{0cba}$, которого не существует.

В предыдущем рассуждении содержится небольшой изъян. А именно, при $a = c$ в ситуации $l + m + n = b + c$ возможен ещё один случай: $l + m = m + n = b + c$, $k + l = c$, $k + l + m = a + b + c$. Но он быстро приводит к противоречию: из первых двух равенств получается, что $l = n = 0$, $m = b + c$, а тогда $k + l = k + l + m$, откуда $a + b = 0$. Поэтому этот случай на самом деле никогда места не имеет.

Посчитаем количество исключительных чисел вида $X = \overline{abc0}$ с условием $a + b \geqslant 10$. Для каждой ненулевой цифры a цифра b может быть любой от $10-a$ до 9, то есть принимать одно из $9 - (9 - a) = a$ значений. Цифра c принимает любое значение от 0 до a — всего $a+1$ значение. Значит, при конкретном a существует $a(a+1) = a^2 + a$ исключительных чисел такого вида, а общее их число равно $1^2+1+2^2+2+\ldots+9^2+9 = 330$ чисел.

Всего набирается $9 + 9 + 54 + 330 = 402$ исключительных числа.

Ответ. 402 числа.

9.4 *Пусть* $0 \leqslant x \leqslant n$, *где* n *— произвольное натуральное число. Докажите неравенство* $|x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)| \leqslant \dfrac{n!}{4}$.

Решение. Способ 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = |x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)|,$$

определённую на отрезке $[0; n]$. Требуется доказать, что наибольшее значение этой функции не превосходит числа $\dfrac{n!}{4}$.

Во-первых, заметим, что $f(n-x) = f(x)$. Действительно,

$$f(n-x) = |(n-x)(n-x-1)\ldots(n-x-(n-1))(n-x-n)| =$$
$$= |n-x| \cdot |n-1-x| \cdot \ldots \cdot |1-x| \cdot |x| =$$
$$= |x-n| \cdot |x-(n-1)| \cdot \ldots \cdot |x-1| \cdot |x| = f(x).$$

Значит, неравенство достаточно доказать для всех x из отрезка $\left[0; \dfrac{n}{2}\right]$. Далее считаем, что x меняется только в пределах этого отрезка.

Второе. Пусть $n > 2$ (при меньших n сделанный ниже вывод очевиден), а $x > 1$. Сравним значения функции $f(x)$ и $f(x-1)$. При $x \in \mathbf{Z}$ они оба равны нулю. Пусть x — не целое и лежит в отрезке $\left[1; \dfrac{n}{2}\right]$. Тогда

$$f(x-1) = |(x-1)(x-2)\ldots(x-n)(x-(n+1))|;$$

$$\frac{f(x-1)}{f(x)} = \frac{|(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-(n+1))|}{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)|} =$$
$$= \frac{|x-n-1|}{|x|} = \frac{n+1-x}{x} \geqslant 1.$$

Значит, $f(x-1) \geqslant f(x)$, и нам достаточно рассмотреть $f(x)$ на отрезке $[0;\, 1]$.

Итак, пусть $x \in [0;\, 1]$. Тогда при любом целом числе $k \geqslant 2$ выполняется неравенство $|x-k| = k-x < k$. Значит, верна оценка

$$f(x) = |x| \cdot |(x-1)| \cdot |(x-2)| \cdot \ldots \cdot (x-n)| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \cdot |(x-1)| \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = x \cdot (1-x) \cdot n!$$

Остаётся заметить, что

$$x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Тогда для $x \in [0;\, 1]$ (и, значит, для всех $x \in [0;\, n]$) выполнено неравенство

$$f(x) \leqslant x \cdot (1-x) \cdot n! \leqslant \frac{1}{4} \cdot n!,$$

что и требуется доказать.

Примечание. Из приведённого доказательства видно, что равенство достигается только при $n = 1$ и только в точке $x = \dfrac{1}{2}$.

Способ 2. Докажем утверждение индукцией по n.

База индукции: $n = 1$. Тогда требуется доказать, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ выполняется неравенство $|x(x-1)| \leqslant \frac{1}{4}$, которое, после раскрытия модуля, равносильно неравенству $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$. Справедливость этого следует из того, что максимум квадратичной функции $y = -x^2 + x$ достигается в вершине, то есть в точке $x = \frac{1}{2}$, и это максимальное значение равняется $\frac{1}{4}$.

Шаг индукции: Пусть при некотором $n \geqslant 1$ для любого $0 \leqslant x \leqslant n$ выполняется неравенство $|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)| \leqslant \dfrac{n!}{4}$. Докажем утверждение для числа $n+1$, то есть докажем, что для любого $0 \leqslant x \leqslant n+1$ выполняется неравенство $|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-(n+1))| \leqslant \dfrac{(n+1)!}{4}$. В случае, когда $0 \leqslant x \leqslant n$, по предположению индукции имеем $|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)| \leqslant \dfrac{n!}{4}$. Тогда $|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-$

$(n+1))| \leqslant \dfrac{n!}{4}|x-(n+1)|$, причём $|x-(n+1)| \leqslant n+1$, откуда и получаем нужное неравенство. Если же $n \leqslant x \leqslant n+1$, то при каждом натуральном k, таком, что $1 \leqslant k \leqslant n-1$ имеем $|x-k| = x-k \leqslant n-k$. Тогда $|x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-2))| \leqslant (n+1)n(n-1)\dots 2 = (n+1)!$.

Наконец, оценим сверху выражение $|(x-n)(x-(n+1))|$. При замене $t = x-n$ получаем $0 \leqslant y \leqslant 1$ и выражение $|y(y-1)|$, которое, по доказанному ранее, не превосходит $\frac{1}{4}$. Перемножая полученные неравенства, получаем $|x(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-(n+1))| \leqslant \dfrac{1}{4}(n+1)!$, что и требовалось доказать.

9.5 *На окружности стоят n белых точек. Красный и Синий играют в следующую игру. На своем ходе игрок выбирает любую белую точку и красит её: Красный в красный цвет, а Синий — в синий. Ходят по очереди, до тех пор, пока все белые точки не окажутся окрашеными. После этого считают количество разноцветных пар соседних точек. Если оно больше $\dfrac{n}{2}$, побеждает Красный, если меньше $\dfrac{n}{2}$ — Синий, а если равно $\dfrac{n}{2}$, то результат игры — ничья. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если:*

а) $n = 4$, начинает Красный?

б) $n = 1234$, начинает Синий?

в) $n = 1234$, начинает Красный?

г) $n = 1235$, начинает Красный?

Ответы обоснуйте.

Решение.

В силу симметрии от первой покрашенной точки ничего не зависит. Пусть эта точка будет точка A_1. Остальные точки занумеруем в порядке их следования по часовой стрелке: A_2, A_3, …, A_n.

а) $n = 4$ и A_1 — красная. Если теперь Синий позволит Красному покрасить ещё и точку A_3, то все пары соседних точек будут разноцветными, их число будет 4, и Красный победит. Поэтому Синий, если не хочет проиграть, обязан красить первым своим ходом в синий цвет точку A_3. Теперь независимо от дальнейшей игры две красные точки будут рядом, две синие — тоже, и разноцветных пар будет 2. Ничья.

б) $n = 1234$ и A_1 — синяя.

Красный может не проиграть, если будет придерживаться следующей стратегии: он делит мысленно точки на пары вида A_kA_{k+1}, где k — нечётно (будем называть эти пары *особыми*), и каждым своим ходом красит точку в той же паре, что и Синий своим последним ходом. (В частности, первым ходом он красит точку A_2.) Такая стратегия возможна, поскольку точек чётное количество. В этом случае в конце игры в каждой особой паре будут точки разного цвета, что и даст Красному необходимые $\frac{n}{2} = 617$ пар.

Покажем, что описанная выше стратегия Красного приведёт его даже к победе. В самом деле, 617 пар соседних разноцветных точек у него уже есть. Если найдётся ещё одна разноцветная пара (вида A_kA_{k+1}, где k — чётно) — Красный выиграл. Покажем, что независимо от действий Синего такая пара найдётся. Пусть игра, в которой Красный действовал по описанной стратегии, завершена. Назовём особую пару A_kA_{k+1} *левой*, если точка A_k синяя (тогда точка A_{k+1} красная), и *правой* в противном случае. Если где-то в ряду идут последовательно две левые особые пары, или две правые особые пары, на их стыке возникает дополнительная пара соседних разноцветных точек. Чтобы Синий не проиграл, правые и левые пары, следовательно, должны чередоваться. Но это невозможно, поскольку всего особых пар нечётно.

в) $n = 1234$ и A_1 — красная.

Красный выигрывает, если будет придерживаться следующей стратегии: он разделяет точки на те же пары, что и в предыдущем случае, и по-прежнему старается отвечать покраской точки в той же паре, где покрасил свою точку Синий предыдущим ходом. Это возможно до тех пор, пока Синий не покрасит точку A_2. Теперь имеется какое-то количество особых пар, в которых одна точка синяя, а вторая красная, и, возможно, сколько-то особых пар, в которых ни одна точка не окрашена. Тогда Красный красит произвольную точку A_m и возвращается к описанной ранее стратегии. Как только Синий покрасит точку в той особой паре, в которую входит A_m, Красный вновь красит произвольную точку. В итоге после всех окрашиваний в каждой особой паре будет по синей и красной точке, а значит, Красный победит, что уже доказано при решении пункта б.

г) $n = 1235$ и A_1 — красная.

При нечётном n в принципе невозможна ничья, поскольку число $\frac{n}{2}$ не целое. В силу этого стратегия, которая не проигрывает, автоматически становится выигрышной. Покажем такую не проигрывающую стратегию за Красного. Рассмотрим пары соседних точек, не являющиеся особыми (A_2A_3, A_4A_5, …, $A_{1234}A_{1235}$). Их 667 штук. Красный может отвечать в туже пару, в которую до него сходил Синий — это даст ему 667 пар разноцветных соседних точек. Ещё одна пара разноцветных соседних точек гарантирует ему победу. Пусть такой пары нет. Тогда точка A_2 красная, точки A_3 и A_4 — синие, A_5 и A_6 — красные, A_7 и A_8 — синие и т. д. Рассуждая далее (строгое рассуждение делается по индукции), видим, что цвет точки определяется остатком её номера от деления на 4: остаток 1 или 2 — точка красная, 3 или 0 — синяя. Так как 1235 при делении на 4 даёт в остатке 3, точка A_{1235} должна быть синей, и возникает дополнительная пара $A_{1235}A_1$, в который точки разноцветные.

Ответ. а) Никто. б) Красный. в) Красный. г) Красный

10 КЛАСС

10.1 *Натуральное число n таково, что любой многочлен степени n, удовлетворяющий одновременно равенствам $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$, удовлетворяет также и равенству $P(3) = P(-3)$. Найдите все такие числа n.*

Решение. Способ 1.

Пусть $n \geqslant 5$. Рассмотрим

$$P(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\dots(x+(n-2)).$$

Он удовлетворяет условию, так как $P(-2) = P(-1) = P(1) = P(2) = 0$. Но $P(-3) = 0 \neq P(3) = \dfrac{(n-1)!}{3}$. Значит, все $n \geqslant 5$ не удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь $n \leqslant 4$, а многочлен имеет вид $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1^x + a_0$ (не исключено, что $a_4 = 0$ — значит, мы рассматриваем многочлены и более низких, чем 4, степеней). По условию

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0,$$

откуда $a_3 + a_1 = 0$. Также по условию

$$16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0,$$

откуда $4a_3 + a_1 = 0$. Отсюда $a_1 = a_3 = 0$, $P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ и $P(-3) = P(3)$ ввиду чётности функции $P(x)$.

Способ 2.

Представим $P(x)$ в виде суммы многочленов $P(x) = T(x)+K(x)$, где $T(x)$ — сумма всех одночленов чётной степени, $K(x)$ — нечётной. Тогда $T(a) = T(-a)$ для любого действительного числа a, поэтому многочлен $T(x)$ не влияет на решение никак. Также для всех действительных a выполняется условие $K(a) = -K(-a)$. Отсюда, во-первых, $K(0) = 0$, во-вторых, по условию $K(1) = K(-1) = 0$ и $K(2) = K(-2) = 0$. Значит, $K(x)$ имеет не менее 5 различных корней. Тогда он либо имеет степень, большую 5, либо тождественно равен 0. При $n < 5$ возможен только последний случай. При этом $P(x) = T(x)$ — функция чётная, поэтому $P(3) = P(-3)$. Все такие n, значит, нас устраивают. Если же $n \geqslant 5$, то наряду с многочленом $P(x)$ рассмотрим многочлен $P_1(x) = P(x)+(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$, который имеет ту же степень, что и многочлен $P(x)$ и также удовлетворяет условиям $P_1(-2) = P(-2) = P(2) = P_1(2)$ и $P_1(-1) = P(-1) = P(1) = P_1(1)$. При этом $P_1(3) = P(3)+120$, а $P_1(-3) = P(-3)-120$, поэтому из двух многочленов $P(x)$ и $P_1(x)$ условию равенства значений в точках -3 и 3 может удовлетворять не больше одного из многочленов $P(x)$, $P_1(x)$, и такое значение n нам не подходит.

Ответ. $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Примечание. На самом деле нет ни одного многочлена степени 1 или 3, удовлетворяющих условию задачи. Однако, значения $n = 1$ и $n = 3$ нас устраивают, поскольку контрпримера к условию задачи они дать не могут.

10.2 *В окружность вписан двенадцатиугольник, длины сторон которого (в сантиметрах) последовательно равны* 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2. *Найдите радиус этой окружности.*

Решение.

Способ 1. Вершины двенадцатиугольника делят окружность на 12 дуг; при этом 6 из них стягиваются хордой длины 1 (и поэтому равны между собой), а 6 — хордой длины 2 (и они тоже равны между собой). Переставим эти дуги по окружности так, чтобы их величины чередовались, при этом эти дуги всё равно займут окружность целиком. Обозначив концы дуг в порядке их следования по окружности буквами A_i $(1 \leqslant i \leqslant 12)$, получим вписанный в ту же окружность многоугольник $A_1A_2\ldots A_{12}$, у которого длины сторон чередуются и все по-прежнему равны 1 или 2. Без ограничения общности считаем, что $A_1A_2 = 1$ и $A_2A_3 = 2$. Этот многоугольник поворотом вокруг центра окружности (точки O) на угол $\alpha = \angle A_1OA_3$ перейдёт в себя (вершина A_n — в вершину A_{n+2} при всех n, сложение рассматривается по модулю 12). При 6 последовательных таких поворотах вершина шестиугольника A_1 перейдёт по маршруту $A_1 \to A_3 \to A_5 \to A_7 \to A_9 \to A_{11} \to A_1$ и, тем самым, совершит полный оборот вокруг центра окружности. Значит, шестиугольник $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ — правильный, и его сторона равна радиусу описанной окружности, числу R. Значит, стороны треугольника $A_1A_2A_3$ равны 1, 2 и R. Кроме того, $\angle A_1A_2A_3 = 150^\circ$, так как этот угол вписанный и опирается на дугу в $5/6$ окружности. По теореме косинусов $R^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos(150^\circ) = 5 + 2\sqrt{3}$. Значит, $R = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$.

Способ 2. Пусть $A_1A_2\ldots A_{12}$ — данный 12 угольник, O — центр описанной окружности, R — её радиус. Рассмотрим 12 треугольников A_1OA_2, A_2OA_3, …, $A_{12}OA_1$. Все они равнобедренные с боковой стороной R. При этом у шести из них основание равно 1, а у шести — 2. Значит, у шести из них угол при вершине равен α, где $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2R}$, а у шести оставшихся β, где $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{R}$. Эти 12 углов при вершине составляют развёрнутый угол, поэтому $6\alpha + 6\beta = 360°$, откуда $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 30°$. Углы α и β острые, поэтому $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sqrt{4R^2-1}}{2R}$; $\cos\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\beta}{2}} = \dfrac{\sqrt{R^2-1}}{R}$. Имеем уравнение.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{4R^2-1}}{2R}\cdot\frac{\sqrt{R^2-1}}{R} - \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{R}.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{4R^2-1}}{2R}\cdot\frac{\sqrt{R^2-1}}{R} - \frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{R}$$

$$\sqrt{3}R^2 = \sqrt{(4R^2-1)\cdot(R^2-1)} - 1$$

$$(\sqrt{3}R^2+1)^2 = (4R^2-1)\cdot(R^2-1)$$

$$3R^4 + 2\sqrt{3}R^2 + 1 = 4R^4 - 5R^2 + 1$$

$$R^4 = R^2(2\sqrt{3}+5)$$

и так как R — величина положительная, $R = \sqrt{2\sqrt{3}+5}$.

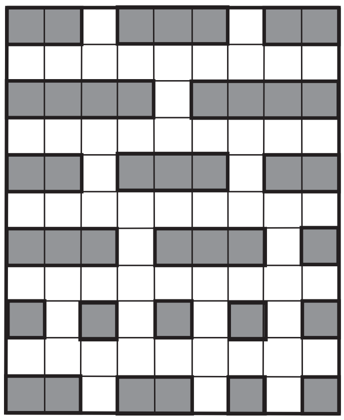
Ответ. $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

10.3 *Комплект кораблей для игры в «морской бой» состоит из одного линкора (прямоугольника* 1×4*), двух крейсеров (прямоугольников* 1×3*), трёх эсминцев (прямоугольников* 1×2*) и четырёх катеров (квадратов* 1×1*). Можно ли разместить два комплекта кораблей (любые два корабля не должны иметь общих точек)*

а) в прямоугольнике 9×11 *клеток; (2 балла)*

б) в квадрате 10×10 *клеток? (5 баллов)*

Ответы обоснуйте.



К решению задачи 10.3

Решение. а) Это можно сделать разными способами. Например, как показано на рисунке.

б) Покажем, методом «от противного», что это невозможно. Пусть на поле 10×10 клеток удалось разместить два комплекта кораблей. Сотрём по одной клетке с каждого эсминца, по центральной клетке с каждого крейсера и две клетки, идущие через одну, с каждого линкора. В результате каждый эсминец превратится в катер, а каждый линкор и каждый крейсер — в пару катеров, стоящих через клетку. Мы получим $2\cdot(4+3+2\cdot2+1\cdot2) = 26$ катеров, правильно расположенных на поле. Но поле 10×10 легко разделить на 25 квадратов размера 2×2; по принципу Дирихле в каком-то из этих квадратов будет не меньше двух катеров, что невозможно. Противоречие.

Ответ. а) Можно. б) Нельзя.

10.4 *Найдите натуральное число n, удовлетворяющее двойному неравенству*

$$n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{1\,000\,000}} < n+1.$$

Решение. Пусть $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{1\,000\,000}}$.
Заметим, что для любого натурального числа $k > 1$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})} = \sqrt{k}-\sqrt{k-1} \text{ и}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

.

Отсюда

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000} < \frac{1}{2\sqrt{1\,000\,000}} < \sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{999\,999}.$$

Сложим все 999 999 двойных неравенств и получим

$$\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{2} < S-\frac{1}{2} < \sqrt{1\,000\,000}-1 = 999$$

$$\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{2}+0,5 < S < 999,5$$

.

Оценим левую часть полученного двойного неравенства. Так как $\sqrt{1\,000\,001} > 1000$, а $\sqrt{2} < 1,5$, имеем $\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{2} + 0,5 > 999$.

Значит, $999 < S < 999,5$, откуда $n = 999$.

Ответ. $n = 999$.

10.5 *Над плоскостью порхают n светлячков ($n > 2$), занумерованных натуральными числами от 1 до n. Время от времени светлячки на эту плоскость садятся. Известно, что если на плоскости одновременно оказываются светлячки с номерами i и j, то расстояние между ними в этот момент составляет в точности $d_{i,j}$, где $d_{i,j} = d_{j,i}$ — некоторое вещественное положительное число, своё для каждой пары светлячков.*

Пусть k — некоторое натуральное число. Существуют ли такое натуральное число $n > k$ и такие положительные числа $d_{i,j}$ ($1 \leqslant i < j \leqslant n$), что любые k или менее светлячков могут сесть на плоскость одновременно, а все n светлячков этого сделать не могут. Решите задачу в случае:

(а) $k = 2$; *(1 балл)*

(б) $k = 3$; *(2 балла)*

(в) $k = 4$; *(6 баллов)*

(г) $k = 5$. *(5 баллов)*

Ответы обоснуйте.

Решение.

а) Два любых светлячка могут сесть на плоскость при любых положительных значениях чисел $d_{i,j}$, а три только, если попарные расстояния между точками их приземления удовлетворяют неравенству треугольника (возможно, не строгому). Поэтому, например, при $n = 3$, $d_{1,2} = d_{2,3} = 1$, $d_{1,3} = 10$ условие задачи выполнено.

б) Пусть $n = 4$, а все числа $d_{i,j}$ равны. Тогда любые три светлячка могут сесть в вершины равностороннего треугольника со стороной $d_{i,j}$, а все 4 не могут, поскольку в плоскости нет четырёх точек, попарные расстояния между которыми одинаковы.

в) Пусть $n = 5$, $d_{1,2} = d_{1,3} = d_{2,3} = 3$, $d_{1,4} = d_{2,4} = d_{1,5} = d_{2,5} = d_{3,4} = d_{3,5} = d_{4,5} = \sqrt{3}$. Сначала покажем, что любые 4 светлячка могут одновременно сесть на плоскость. Если единственный не севший на плоскость светлячок — это светлячок №4 (или №5), то первые три светлячка садятся в вершины правильного треугольника со стороной 3, а светлячок №5 (или №4) — в центр этого треугольника, и задача решена. В остальных случаях (можно считать, что на плоскость не сел светлячок

№1) светлячки садятся в вершины ромба со стороной 3 и острым углом 60°, при этом светлячки №4 и №5 садятся в вершины тупых углов ромба. Все расстояния соблюдены.

Теперь покажем, что все 5 светлячков не могут сесть на плоскость одновременно. Пусть, от противного, это удалось. Тогда светлячки №1 — №3 обязаны сесть в вершины некоторого правильного треугольника со стороной 3, а два остальных в точки, равноудалённые от всех вершин этого треугольника. Но такая точка только одна — центр описанной окружности. В неё не могут сесть оба светлячка, поскольку в этом случае расстояние между ними будет равно 0, а вовсе не $\sqrt{3}$. Противоречие.

г) Покажем, что если любые 5 светлячков могут сесть на плоскость одновременно, то и все n светлячков могут это сделать. Прежде всего заметим, что для любых чисел i, j, $m \leqslant n$ числа $d_{i,j}$, $d_{i,m}$, $d_{j,m}$ обязаны удовлетворять нестрогому неравенству треугольника, так как в противном случае уже эти 3 светлячка с указанными номерами на плоскость одновременно не сядут. Далее возможно два случая.

Случай 1. Есть три светлячка, попарные расстояния между которыми удовлетворяют строгому неравенству треугольника. Без ограничения общности пусть это светлячки с номерами с первого по третий. Если они сядут на плоскость одновременно, то окажутся в вершинах некоторого треугольника $A_1A_2A_3$ со сторонами $A_1A_2 = d_{1,2}$, $A_1A_3 = d_{1,3}$, $A_2A_3 = d_{2,3}$ (отметим, что все такие треугольники равны по трём сторонам, поэтому можно считать, что треугольник $A_1A_2A_3$ зафиксирован). Рассмотрим любого светлячка из оставшихся, с некоторым номером $m > 3$. Он может сесть на плоскость одновременно с первыми тремя, при этом обязан оказаться в точке лежащей на пересечении окружностей радиусов $d_{1,m}$, $d_{2,m}$, $d_{3,m}$ с центрами в точках A_1, A_2, A_3 соответственно. Но эти три окружности могут пересекаться не более, чем в одной точке, поскольку их центры не лежат на одной прямой. Значит, положение m-го светлячка однозначно определено, это точка A_m. При этом $A_mA_p = d_{m,p}$ для любых $3 < m$, $p \leqslant n$, иначе 5 светлячков с номерами 1, 2, 3, m, p одновременно на плоскость не сядут. Значит, мы можем посадить всех n светлячков в точки $A_1, \ldots, A_n$ и условия посадки будут выполнены.

Случай 2. Для любой тройки чисел вида $d_{i,j}$, $d_{i,m}$, $d_{j,m}$ выполняется равенство $d_{i,j} + d_{i,m} = d_{j,m}$ ($d_{j,m}$ — наибольшее из этих трёх расстояний). Без ограничения общности считаем, что $d_{1,2}$ — самое большое из всех чисел, задающих расстояние между севшими светлячками. Тогда для любого $m > 2$ $d_{1,m} + d_{2,m} = d_{1,2}$. Значит, если первый и второй светлячки сели на плоскость в точки A_1 и A_2 (конечно, $A_1A_2 = d_{1,2}$), то любой другой светлячок (с номером m), желающий сесть на плоскость вместе с ними, обязан сесть в такую точку A_m отрезка A_1A_2, что $A_1A_m = d_{1,m}$ и $A_2A_m = d_{2,m}$. Такая точка единственная. При этом $A_mA_p = d_{m,p}$ для любых $2 < m$, $p \leqslant n$, иначе уже 4 светлячка с номерами 1, 2, m, p одновременно на плоскость не сядут. Как и в случае 1, мы можем посадить всех n светлячков в точки A_1, …, A_n и условия посадки будут выполнены.

Ответ. а) Да. б) Да. в) Да. г) Нет.

11 КЛАСС

11.1 *Андрей выписал все натуральные числа, меньшие* 2020*, среди которых нет чисел делящихся на* 3 *и нет чисел делящихся на* 5*. Отличница Лиза решила посчитать произведение всех этих чисел. На какую цифру окончится результат, полученный Лизой, если она не ошибётся? Ответ обоснуйте.*

Решение. За последнюю цифру произведения отвечают последние цифры сомножителей. Рассмотрим первые 30 натуральных чисел. Те, которые оканчиваются цифрой 5 или цифрой 0, Андреем не взяты (делятся на 5). Кроме того, не взяты числа 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 (как делящиеся на 3). Таким образом, среди последних цифр оставшихся нет нулей и пятёрок, а остальные цифры встречаются по 2 раза каждое (было по три, но одно вхождение выброшено). Числа, оканчивающиеся 1, в произведении дают последней цифрой 1, числа, оканчивающиеся 9 — тоже ($9 \cdot 9 = 81$), а числа, оканчивающиеся тройкой и семёркой «нейтрализуют» друг друга ($3 \cdot 7 = 21$). Значит, нечётные числа не влияют на последнюю цифру произведения. Остаются цифры 2, 4, 6, 8, по два экземпляра каждое. Их произведение оканчивается цифрой 6. Этой же цифрой оканчивается произведение первых 30 натуральных чисел, из которых выброшены числа, кратные 3 и 5.

Каждые последующие 30 натуральных чисел дают тот же набор последних цифр, поскольку числа n и $n+30$ либо одновременно взяты, либо одновременно выброшены. Так как произведение любого количества шестёрок оканчивается цифрой 6, эта цифра будет последней цифрой произведения всех выписанных Андреем чисел, которые не превосходят 2010 ($30 \cdot 67$).

Остаётся учесть числа из отрезка $[2011; 2019]$. Из них Андреем выписаны 2011, 2012, 2014, 2017 и 2018. Произведение их последних цифр оканчивается на 8. Так как $6 \cdot 8 = 48$, на 8 оканчивается и произведение всех чисел, выписанных Андреем.

Ответ. На цифру 8.

11.2 *В правильный тетраэдр вписали шар объёма* 1*. В каждый из четырёх трёхгранных углов пирамиды вписали по меньшему шару, касающемуся исходного. В каждый из четырёх трёхгранных углов снова вписали по ещё меньшему шару, каждый из которых снова касается ближайшего к нему шара. Так повторили бесконечное число раз. Найдите сумму объёмов всех вписанных шаров. Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть O — центр вписанного в тетраэдр шара. Рассмотрим любую из вершин тетраэдра, например A. Отметим, что в правильном тетраэдре центр вписанной сферы совпадает с центром тяжести, а значит находится на $\frac{1}{4}$ перпендикуляра, опущенного с A на противоположное основание. Поскольку сфера касается основания в основании перпендикуляра H, то противоположная точке касания точка сферы H_1 находится ровно на половине перпендикуляра. Проведем через нее плоскость, параллельную основанию. Получили правильный тетраэдр, подобный исходному с коэффициентом $1/2$, при этом AH_1 является перпендикуляром, опущенным с A на соответствующее основание меньшего тетраэдра. Тогда точка H_1 явяется и точкой касания сферы, вписанной в меньший тетраэдр и касающейся также исходной сферы. Поскольку меньший тетраэдр имеет линейные размеры в два раза меньше исходного, то же можно сказать о сферах. Итак, объем меньшего шара в 2^3 раз меньше, то есть равен $\frac{1}{8}$.

Повторяя рассуждения для этого двугранного угла взяв меньший тетраэдр в качестве исходного, получим, что следующий вписанный в этот угол шар имеет объем $\frac{1}{8^2}$, далее $\frac{1}{8^3}, \ldots, \frac{1}{8^k}, \ldots$. По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии имеем, что их суммарный объем равен

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}.$$

Теперь суммарный объем по всем трехгранным углам равен $\frac{4}{7}$, а всех шаров вместе с исходным — $1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$.

Ответ. $\frac{11}{7}$.

11.3 *Функция $f(x)$ определена для всех положительных рациональных чисел и удовлетворяет тождеству $f(xy) \equiv f(x) + f(y)$. Известно, что $f(1/2020) = 1$. Найдите*

а) $f(2020)$; *(2 балла)*

б) $f(2019)$. *(5 баллов)*

Решение. а) Заметим, что $f(1 \cdot x) = f(x) + f(1)$, откуда $f(1)$ обязано быть нулём. Теперь из $0 = f(1) = f(2020/2020) = f(2020) + f(1/2020) = f(2020) + 1$ следует, что $f(1/2020)$ обязано быть -1. Осталось доказать, что хотя бы одна такая функция есть, например подставив $f(x) = -\log_{2020} x$.

б) Докажем, что $f(2019)$ можно назначить равным любому действительному числу d. Заметим, что $2020 = 101 \cdot 20$ и $2019 = 3 \cdot 673$, а числа $3, 101$ просты. Примем

$f(3^m 101^{-n} st^{-1}) = dm - n$ для всех целых m, n и взаимнопростых с 3 и 101 натуральных чисел s, t. Поскольку всякое рациональное число однозначно (с точностью до порядка) представимо в виде произведения целых ненулевых степеней простых множителей, мы однозначно определили функцию для всех рациональных чисел. Правило $f(xy) = f(x) + f(y)$ легко проверить подстановкой. Осталось заметить, что $f(1/2020) = f(20^{-1}) + f(101^{-1}) = 0 - (-1) = 1$ и $f(2019) = f(3) + f(673) = d + 0 = d$ в силу взаимной простоты чисел $3, 20, 673, 101$.

Ответ. а) $f(2020) = -1$ б) $f(2019)$ — любое число.

11.4 *Лицевая сторона плоскости — белая, а её изнанка — чёрная. Из плоскости вырезали треугольный лоскут ABC. Можно ли разрезать этот треугольник на не более чем три части, каждую перевернуть и так вшить изнаночной стороной наружу, чтобы получить на исходной белой плоскости чёрный треугольник ABC? Решите задачу для*

а) прямоугольного треугольника; *(1 балл)*

б) остроугольного треугольника; *(2 балла)*

в) произвольного треугольника. *(4 балла)*

Решение. Заметим, что если мы разрежем исходный треугольник на лоскуты, каждый из которых имеет ось симметрии, а затем перевернем каждый лоскут, то мы сможем вшить его на то же место, но уже изнаночной (чёрной) стороной наружу. Следовательно для каждого пункта достаточно предъявить такое разрезание.

а) Достаточно разрезать треугольник на два равнобедренных по его медиане, опущенной к гипотенузе. Получили разбиение на два равнобедренных треугольника.

б) Рассмотрим центр описанной окружности, соединим его с вершинами тремя отрезками. Разрежем треугольник по этим отрезкам. Получили разбиение на три равнобедренных треугольника.

в) Рассмотрим вписанную окружность, опустим из её центра перпендикуляры на все стороны. Разрежем треугольник по этим перпендикулярам. Получили разбиение на три четырёхугольника, каждый четырёхугольник симметричен относительно одной своей диагонали.

Замечание Понятно, что любое решение пункта в) решает и остальные пункты, а изложенное решение пункта б) фактически совпадает с решением для а).

Ответ. Можно во все пунктах.

11.5 *Единичкин и Десяткин при помощи Арбитра играют в следующую игру. У*

Арбитра имеется 9 *карточек с цифрами* $1,\ 2,\ \ldots,\ 9$. *Арбитр делит все карточки на две (непустые) кучки и дает их игрокам: Десяткину и Единичкину. Затем каждый из игроков, посмотрев свои карточки, убирает какие-то из них. При этом игрок обязан оставить хотя бы одну карточку в своей кучке и имеет право не убирать ни одной. После этого Арбитр наудачу, не глядя, выбирает по одной оставшейся карточке из кучек Единичкина и Десяткина. Цифра с выбранной карточки из кучки Десяткина ставится в разряд десятков, из кучки Единичкина — в разряд единиц. Десяткин выигрывает, если так полученное двузначное число — простое, иначе выигрывает Единичкин.*

а) Докажите, что если Единичкину выдано карточек больше, чем Десяткину, то он может гарантировать себе выигрыш (то есть он выигрывает вне зависимости от действий противника и случая: выбранной Арбитром пары карточек). (1 балл)

б) Известно, что Единичкину выданы такие три карточки, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш. Какие у него карточки? Приведите все возможные варианты и докажите, что нет других. (2 балла)

в) В условиях пункта б) докажите, что Десяткин может играть так, что, как бы не играл соперник, вероятность выигрыша Десяткина будет не меньше $0,5$. *(3 балла)*

г) В условиях пункта б) докажите, что Единичкин может играть так, что, как бы не играл соперник, вероятность выигрыша Единичкина будет не меньше $0,5$. *(3 балла)*

д) Известно, что Единичкину выданы такие четыре карточки, что ни один из игроков не может гарантировать себе выигрыш. Может ли хотя бы один из игроков обеспечить себе (вне зависимости от действий соперника) вероятность выигрыша больше $0,5$*? Ответ обоснуйте. (5 баллов)*

Решение. а) Если Единичкину выдано карточек больше, то у Десяткина не больше четырех цифр, и хотя бы одна из цифр 2, 4, 6, 8, 5 у Единичкина есть. Стратегия Единичкина — отбросить все карточки, кроме карточек из этого списка. При любом действии Десяткина, при любом выборе Арбитра полученное число будет делиться или на 2, или на 5. Поскольку это число не меньше 10, то оно составное, и Единичкин выиграл.

б) Как показано выше, Единичкин выигрывает, если имеет хотя бы одну из карточек 2, 4, 6, 8, 5. Следовательно у Десяткина есть 2, 4, 6, 8, 5 и еще карточка , а у Единичкина — три карточки из списка 1, 3, 7, 9. Таким образом имеется четыре варианта: $(1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 5\,|\,3,\ 7,\ 9)$, $(7,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 5\,|\,1,\ 3,\ 9)$, $(9,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 5\,|\,1,\ 3,\ 7)$, $(3,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 5\,|\,1,\ 7,\ 9)$. Покажем, что первые три не подходят под условие.

$(1, 2, 4, 6, 8, 5 \,|\, 3, 7, 9)$: оставив 1, Десяткин выигрывает (13, 17, 19 просты).
$(7, 2, 4, 6, 8, 5 \,|\, 1, 3, 9)$: оставив 7, Десяткин выигрывает (71, 73, 79 просты).
$(9, 2, 4, 6, 8, 5 \,|\, 1, 3, 7)$: оставив 4, Десяткин выигрывает (41, 43, 49 просты).
Следовательно Единичкину выдано 1, 7, 9.

в) Согласно предыдущему пункту Арбитр раздал $(3, 2, 4, 6, 8, 5 \,|\, 1, 7, 9)$. Покажем, что в этом случае Десяткин может играть так, что вероятность его выигрыша не меньше половины. Пусть Десяткин выкинет всё кроме 2, 6. При любых действиях Единичкина Арбитр выберет какую-то его карту. Покажем, что при любом выборе этой карты Десяткин выиграет в половине случаев.
Если Арбитр выбрал 1, то 21 и 61 равновероятны, ровно одно из них просто.
Если Арбитр выбрал 7, то 27 и 67 равновероятны, ровно одно из них просто.
Если Арбитр выбрал 9, то 29 и 69 равновероятны, ровно одно из них просто.

Таким образом, какие бы карты не оставлял Единичкин, при такой стратегии Десяткин выигрывает в половине случаев.

г) согласно пункту б) Арбитр раздал $(3, 2, 4, 6, 8, 5 \,|\, 1, 7, 9)$. Покажем такую стратегию Единичкина, что вероятность его выигрыша не меньше половины. Пусть Единичкин оставит 1, 9. При любых действиях Десяткина Арбитр выберет какую-то его карту, вне зависимости от этого выбора Единичкин выиграет в половине случаев. Действительно:
Если Арбитр выбрал 2, то 21 и 29 равновероятны, ровно одно из них просто.
Если Арбитр выбрал 3, то 31 и 39 равновероятны, ровно одно из них просто.
Если Арбитр выбрал 6, то 61 и 69 равновероятны, ровно одно из них просто.
Если Арбитр выбрал 8, то 81 и 89 равновероятны, ровно одно из них просто.
Если Арбитр выбрал 5, то 51 и 59 равновероятны, ровно одно из них просто.

Таким образом, какие бы карты не оставил Десяткин, при такой стратегии Единичкин выигрывает в половине случаев.

д) Как показано выше, если Единичкину выдали хотя бы одну из карточек 2, 4, 6, 8, 5, то он выиграл. Следовательно у Десяткина есть в точности 2, 4, 6, 8, 5, а у Единичкина — карточки 1, 3, 7, 9. Пусть Единичкин выкинет карточку 3 и применит стратегию из г), та стратегия гарантировала выигрыш в половине случаев при любом выборе Арбитром карточки Десяткина из набора 2, 4, 6, 8, 5; тогда эта же стратегия обеспечит ему выигрыш минимум в половине случаев и в этом пункте. Покажем, что подобная стратегия для ситуации $(2, 4, 6, 8, 5 \,|\, 1, 3, 7, 9)$ есть и у Десяткина.

Пусть снова Десяткин выкинет всё кроме 2, 6. При любых действиях Единичкина Арбитр выберет какую-то его карту, для всех карт кроме 3 уже показано, что Десяткин выиграет в половине случаев. Покажем это и для 3. Если у Единичкина Арбитр выбрал 3, то в половине случаев получится 23, в половине — 63. Ровно одно из этих чисел — простое, Десяткин снова выигрывает в половине случаев. Снова, какие бы карты не оставил Единичкин, при такой стратегии Десяткин выигрывает в половине случаев.

Поскольку каждый из игроков имеет стратегию, гарантирующую выигрыш минимум в половине случаев, ни один из них не может гарантировать выигрыш с вероятностью больше чем $0,5$.

Замечание 1. Отметим, что в пункте в) Десяткину достаточно было оставить одно и то же количество карт из наборов $2, 8, 5$ и $3, 4, 6$.

Замечание 2. В пункте д) Десяткину набор $2, 4$ дает те же шансы. Хотя он и гарантирует с вероятностью 1 простое число в случае выбора Арбитром 3, что означает лишь, что Единичкин не должен оставлять 3... Впрочем, эти тонкости даже в полном доказательстве задачи не требовались.

Ответ. б) 1, 7, 9; д) нет.