ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

5 класс

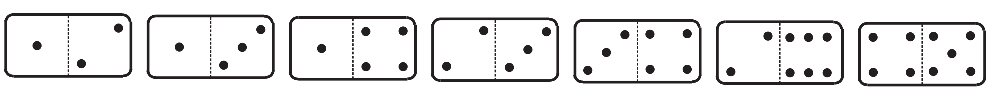
5.1. Длинную и тонкую верёвочку пять раз подряд сложили вдвое, а потом получившийся пучок разрезали в двух местах (не по краям). Сколько кусков верёвочки получилось? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

5.2. Имеется шесть сосудов ёмкостью 1, 2, 3, 4, 5 и 6 литров. Первый и шестой сосуды пустые, второй и пятый полностью заполнены сиропом, а третий и четвёртый полностью заполнены водой. Никаких других ёмкостей и никаких мер объёма нет. Можно ли с помощью переливаний получить ровно 14 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа (возможно, какие-то сосуды при этом окажутся пустыми)? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

5.3. Разрежьте (без остатка) квадрат, периметр которого равен 20, на несколько многоугольников, периметр каждого из которых равен 17. (**7 баллов**)

5.4. На доске написаны три различных натуральных числа. Если наибольшее из них увеличить на 1, то произведение всех трёх чисел станет равно 36. Если вместо этого наименьшее из них увеличить на 1, то произведение всех трёх чисел станет равно 64. А какое будет произведение всех трёх чисел, если на 1 увеличить среднее число? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

5.5. У Андрея есть семь доминошек (см. рисунок). Он хочет выложить в цепочку шесть из них по правилам домино: можно прикладывать друг к другу доминошки так, чтобы соприкасающиеся половинки содержали одинаковое количество точек. Сможет ли он сделать это? Если да, то приведите пример такой цепочки; если нет, то объясните, почему. (**7 баллов**)



К условию задачи 5.5

5.6. На новогодний утренник пришли 30 девочек и несколько мальчиков, причем некоторые из детей были знакомы между собой. В огромном мешке под ёлкой Дед Мороз оставил 2017 подарков. Сначала каждая девочка подарила по одному подарку из мешка каждому знакомому ей мальчику. Затем каждый мальчик подарил по одному подарку из мешка каждой незнакомой ему девочке. Несколько подарков остались в мешке. Какое наименьшее количество подарков могло остаться, и сколько в этом случае было мальчиков? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

6 класс

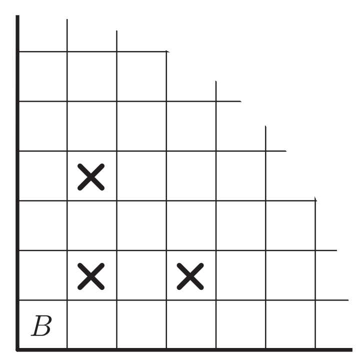
6.1. Разрежьте (без остатка) квадрат на 4 различные части так, чтобы из них можно было составить прямоугольник, не являющийся квадратом. Нарисуйте, как нужно разрезать квадрат и как потом составить прямоугольник. (**7 баллов**)

6.2. В записи натурального числа 679854 использованы шесть последовательных цифр: 4, 5, 6, 7, 8, 9. Найдите следующее за ним бóльшее шестизначное натуральное число, в записи которого также используются шесть последовательных цифр (возможно, других). Ответ обоснуйте: докажите, что между найденным числом и числом 679854 нет других чисел такого вида. (**7 баллов**)

6.3. В зале собрались 1009 мудрецов. У них было 2017 карточек, пронумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2017. При этом у старшего мудреца была одна карточка, у каждого из остальных — по две. Все мудрецы знают числа только на своих карточках. Каждый, кроме старшего мудреца, сказал: «Я знаю, что я не могу отдать старшему мудрецу никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у старшего мудреца? Ответ обоснуйте.(**7 баллов**)

6.4. Карлсон решил похудеть. Для этого он ест только один раз в сутки — либо в ужин, либо в обед, либо в завтрак. Известно, что если он в какой-то день позавтракает, то на следующий день он пообедает. Если он пообедает, то на следующий день он завтракать не будет. Если он поужинал, то на следующий день он позавтракает. Карлсон пообедал 10 января, а за всё время с 10 января по 17 февраля включительно пообедал столько же раз, сколько и позавтракал. Когда Карлсон ел 17 февраля? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

6.5. В противоположных угловых клетках шахматной доски 8×8 стоят Волк и Заяц. Они ходят поочерёдно, Заяц ходит первым. За один ход Заяц может прыгнуть в любую соседнюю по диагонали клетку. Волк за один ход перемещается на одну клетку по вертикали или горизонтали и потом немедленно (в этот же ход) на одну или на три клетки в перпендикулярном направлении. Например, первым ходом Волк может попасть в одну из трех клеток, отмеченных на рисунке. Волк поймает Зайца, если после некоторого хода кого-то из них оба окажутся в одной клетке. Может ли Заяц прыгать так, чтобы никогда не попасть в лапы Волка? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)



К условию задачи 6.5.

6.6. В каждую клетку таблицы 4×4 записали по одной цифре. При этом оказалось, что сумма четырёх цифр в каждой строчке (начиная со второй) на 2 больше, чем сумма четырёх цифр в предыдущей строчке сверху, а сумма четырёх цифр в каждом столбце (начиная со второго) в 2 раза больше, чем сумма четырёх цифр в предыдущем столбце слева. В правом верхнем углу таблицы стоит цифра 5. Какая цифра стоит в правом нижнем углу? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет. (**7 баллов**)

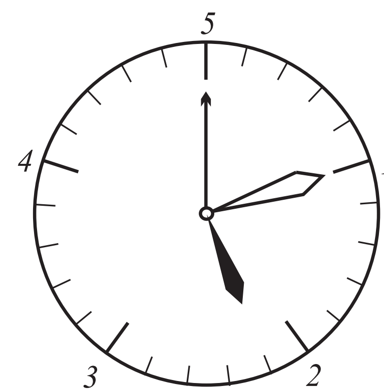
ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

7 класс

7.1. На некой планете в сутках ровно 10 часов, в каждом часе — ровно 25 минут, а в каждой минуте — ровно 25 секунд. Сейчас часы показывают 2 часа 05 минут после полудня (полдень на этой планете наступает в 5 часов 00 минут местного времени). Сколько будет времени (в часах, минутах, секундах), когда минутная стрелка впервые догонит часовую? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)



К условию задачи 7.1.

7.2. В зале собрались 1009 мудрецов. У них было 2017 карточек, пронумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2017. При этом у старшего мудреца была одна карточка, у каждого из остальных — по две. Все мудрецы знают числа только на своих карточках. Каждый, кроме старшего мудреца, сказал: «Я знаю, что я не могу отдать старшему мудрецу никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у старшего мудреца? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

7.3. Семиклассник Петя представил число 2017 в виде суммы трёх натуральных чисел: двузначного, трехзначного и четырехзначного. Для записи этих чисел он использовал 9 различных цифр. Какую цифру он не использовал? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет. (**7 баллов**)

7.4. AD и CE — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором сторона AC — наибольшая. Докажите, что $BE + BD \leqslant AC$. (**7 баллов**)

7.5. Хозяйка магазинчика тётя Нюра решила украшать витрину цветами в течение нескольких дней. Для этого у нее есть N различных горшков с цветами. Тётя Нюра хочет выполнить три условия:

1) ни один горшок не должен находиться на витрине два дня подряд;

2) ни один набор горшков не должен повториться дважды (порядок выставления горшков в наборе не имеет значения);

3) витрину нельзя оставлять пустой ни в какой из дней.

а) Сможет ли тётя Нюра украшать витрину в течение 12 дней, если $N = 4$? Ответ обоснуйте. (**1 балл**)

б) Сможет ли тётя Нюра украшать витрину в течение 13 дней, если $N = 4$? Ответ обоснуйте. (**3 балла**)

в) Пусть $N = 5$. Известно, что в первый и в последний день тётя Нюра ставила на витрину по 4 горшка. Докажите, что на витрине побывали не все наборы из трёх горшков. (**5 баллов**)

г) Докажите, что тётя Нюра не сможет украшать витрину в течение 54 дней, если $N = 6$. (**5 баллов**)

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

8 класс

8.1. Докажите, что если положительные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2 + a + b = ab + a^2 + b^2,$$

то хотя бы одно из них равно единице. (**7 баллов**)

8.2. Из двух приложенных друг к другу прямоугольников составлен невыпуклый шестиугольник. Требуется, используя только линейку без делений, провести прямую, делящую шестиугольник на два многоугольника, имеющих одинаковую площадь. (**7 баллов**)

8.3. Существуют ли 6 различных натуральных попарно взаимно простых чисел a, b, c, d, e, f таких, что число $ab + cd + ef$ делится нацело на каждое из этих чисел? Ответ обоснуйте. (Напомним, что два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1.) (**7 баллов**)

8.4. Аладдин и Джинн строят воздушные замки. В первую ночь Джинн строит один замок; утром Аладдин даёт ему название на арабском языке. Каждую следующую ночь Джинн строит новый воздушный замок и соединяет его мостами с некоторыми построенными ранее замками, возможно, ни с какими. Каждый мост соединяет ровно два замка, один из которых построен в ту же ночь, что и мост. При этом Джинн может соединять замки мостами лишь так, чтобы ни для каких двух замков не существовало более одной последовательности разных мостов, по которым можно добраться от одного замка до другого. Наутро Аладдин даёт вновь построенному замку имя на арабском языке. При выборе имени Аладдин руководствуется правилом: первая буква имени нового замка должна отличаться от первых букв имён тех замков, с которыми новый замок соединён мостами. Может ли Джинн действовать таким образом, что Аладдину для названий замков не хватит всех 28 букв арабского алфавита, какие бы имена Аладдин не выбирал? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

8.5. Вася и Петя играют в морской бой по новым правилам. Игровое поле — это квадрат 4×4 клетки на листе клетчатой бумаги. k-палубная подводная лодка — это прямоугольник $1 \times k$ клеток со сторонами, идущими по линиям сетки. Подводные лодки могут располагаться на игровом поле как вертикально, так и горизонтально, но никакие две лодки не могут соприкасаться друг с другом (даже углами). Выстрелы производятся торпедами; каждый выстрел представляет собой некоторую прямую (вертикальную, горизонтальную или наклонную), проходящую через игровое поле. При этом все лодки, которые данная прямая задела (хотя бы в одной точке) считаются потопленными. Найдите наименьшее число выстрелов, которые достаточно сделать Пете, чтобы гарантировано потопить хотя бы одну Васину лодку, если Петя не знает, где выставлены Васины лодки, но знает, что Вася выставил:

а) одну 1-палубную и одну 3-палубную лодку; (**1 балл**)

б) одну 2-палубную лодку; (**2 балла**)

в) две 2-палубные лодки; (**2 балла**)

г) две 1-палубные лодки; (**4 балла**)

д) одну 1-палубную и одну 2-палубную лодку. (**5 баллов**)

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

9 класс

9.1. Петя написал 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых двух написанных чисел не делится на 17 нацело. Какая наименьшая возможная сумма всех двадцати чисел, написанных Петей? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

9.2. На окружности с центром O выбрали точки C и D по одну сторону от диаметра AB, причём точка C лежит на дуге AD, не содержащей точку B. Пусть E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на отрезки OC и AB соответственно. Оказалось, что DE — биссектриса угла ADC, а DO — биссектриса угла ADF. Найдите угол CAD. Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

9.3. Решите систему уравнений $\begin{cases} a - \dfrac{b}{c} = bc \\ b - \dfrac{c}{a} = ca \\ c - \dfrac{a}{b} = ab \end{cases}$. (**7 баллов**)

9.4. Есть три сосуда объёмом 3, 4 и 5 литров. Кроме того, есть кран с водой и раковина для слива воды. В самом маленьком сосуде налито 3 литра сиропа; остальные сосуды пусты. Можно ли с помощью переливаний получить ровно 6 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа (возможно, какой-то сосуд при этом окажется пустым)? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

9.5. Расстояние между городами A и B равно 1000 км. Через каждые 100 км дороги расположена деревня; других населённых пунктов поблизости нет. Турист совершает многодневный пеший поход по дороге из A в B, делая ночёвки в произвольных местах пути.

Назовём *размахом похода* длину наибольшего из дневных переходов и *отчуждённостью похода* — наименьшее из расстояний от пунктов ночёвки до населённых пунктов.

а) Какое наименьшее число дней мог длиться поход, если его размах равен 50 км, а отчуждённость равна 25 км? Ответ обоснуйте. (**2 балла**)

б) Какое наименьшее число дней мог длиться поход, если его размах равен 40 км, а отчуждённость равна 20 км? Ответ обоснуйте. (**2 балла**)

в) Какова наибольшая возможная отчуждённость похода, если его размах равен 40 км, а поход длился 26 дней? Ответ обоснуйте. (**4 балла**)

г) Пусть размах похода равен 30 км, а поход длился n дней (n — натуральное число, большее 33). Для каждого n найдите наибольшее значение отчуждённости похода. Ответ обоснуйте. (**6 баллов**)

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

10 класс

10.1. Мальвина выписала четыре натуральных числа, а Буратино нашёл для каждой пары этих чисел их наибольший общий делитель. Оказалось, что Буратино получил шесть последовательных натуральных чисел. Не ошибся ли Буратино? Ответ обоснуйте.

(**7 баллов**)

10.2. Про положительные числа a, b и c известно, что $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{a}{4c}+\dfrac{b}{4c}=\dfrac{c}{ab}$ и $abc \geqslant 1$. Докажите, что $c \geqslant 1$. (**7 баллов**)

10.3. На бумаге в клетку нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах сетки так, что ни одна его сторона не идет по линиям сетки. Вася покрасил все горизонтальные линии сетки внутри фигуры в красный цвет, а Петя — все вертикальные в синий. Затем Вася посчитал длину всех красных линий, а Петя — синих. Докажите, что их числа совпали. (**7 баллов**)

10.4. В треугольнике BCD на стороне CD отмечена точка A, на стороне BD — точки F и G (точка F лежит между G и B) так, что треугольники ABC и AGF равносторонние. На стороне CD треугольника BCD во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник CDE. Докажите, что точки A, F, E лежат на одной прямой. (**7 баллов**)

10.5. Алиса и Боб нашли клад, состоящий из чётного количества монет, причём все монеты были разной стоимости. Они решили поделить монеты следующим способом. Сначала Боб выкладывает все монеты в ряд в том порядке, какой ему больше по душе. Затем Алиса и Боб по очереди (Алиса первая) берут себе по монете из этого ряда, при этом каждый раз можно брать только одну из двух крайних монет, либо первую, либо последнюю. И Алиса, и Боб желают получить возможно большую сумму денег.

а) Пусть клад состоит из четырёх монет. Могут ли их стоимости быть такими, что Боб сможет получить денег не меньше, чем Алиса, вне зависимости от её действий? Ответ обоснуйте. (**2 балла**)

б) Докажите, что Алиса всегда может, вне зависимости от действий Боба, получить не меньше чем Боб. (**3 балла**)

в) Пусть клад состоит из шести монет стоимостью 1, 2, 11, 13, 101, 104. Как следует действовать Бобу, чтобы гарантировано получить денег не меньше, чем Алиса? (**3 балла**)

г) Пусть все монеты в кладе либо бронзовые, либо медные, монет каждого вида одинаковое число, суммарная стоимость бронзовых монет не больше суммарной стоимости медных. Докажите, что Боб может получить не меньше, чем суммарная стоимость бронзовых монет. (**6 баллов**)

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

11 класс

11.1. Натуральное число n называется *совершенным*, если сумма всех его натуральных делителей, кроме самого числа n, равна n. Найдите все совершенные числа, десятичная запись которых состоит только из цифр 0 и 6. (**7 баллов**)

11.2. Найдите наибольшее значение выражения

$$\log_{xy} x \cdot \log_{xy} y \cdot \left(\log_{xy} \frac{x}{y}\right)^2.$$

(**7 баллов**)

11.3. Стержень длины 4 расположен целиком внутри куба с ребром 3. Найдите минимально возможное расстояние между серединой этого стержня и ближайшей к ней вершиной куба. Ответ обосновать. (**7 баллов**)

11.4. Есть три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л. Кроме того, есть кран с водой и раковина для слива воды. В самом маленьком сосуде налито 3 литра сиропа; остальные сосуды пусты. Можно ли с помощью переливаний получить ровно 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа (возможно, какой-то сосуд при этом окажется пустым)? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

11.5. Ускоритель элементарных частиц представляет собой окружность длины 6 км. Известно, что во время эксперимента в некоторых точках данной окружности однократно возникнут и сразу исчезнут 6 элементарных частиц, равномерно расположенных по окружности, т. е. так, что расстояние между соседними будет равно 1 км (расстоянием между точками окружности мы называем длину кратчайшей дуги между ними). Перед началом эксперимента физики устанавливают электромагнитную ловушку, состоящую из нескольких датчиков, установленных в некоторых точках ускорителя. Важно, каким окажется минимальное расстояние среди всех попарных расстояний между датчиками ловушки и частицами, которые возникнут в эксперименте. Каким окажется это минимальное расстояние, никто не знает (так как предсказать, где именно возникнут частицы, нельзя). Зато можно заранее оценить максимум такого минимального расстояния (взятый по всем возможным расположениям частиц) — этот максимум называется *дисперсией* ловушки.

а) Найдите дисперсию ловушки, имеющей 1 датчик. (**2 балла**)

б) Найдите дисперсию ловушки, имеющей 30 датчиков, равномерно расположенных по окружности. (**2 балла**)

в) Докажите, что если к произвольной ловушке добавить один новый датчик, расположенный на расстоянии 1 км от одного из старых датчиков, то дисперсия ловушки не изменится. (**4 балла**)

г) Найдите дисперсию ловушки, имеющий 3 датчика, расположенных так, что попарные расстояния между ними равны $\sqrt{2}$ км, $\sqrt{3}$ км и $6-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ км. (**6 баллов**)