ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

2016 — 2017 учебный год

5 класс

РЕШЕНИЯ

5.1. Длинную и тонкую верёвочку пять раз подряд сложили вдвое, а потом получившийся пучок разрезали в двух местах (не по краям). Сколько кусков верёвочки получилось? Ответ обоснуйте.

Решение:

После пяти складываний верёвочка будет сложена $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ раза. Таким образом, исходную верёвочку разрезали в $32 \cdot 2 = 64$ местах. Если верёвочку разрезать в 64 местах, то будет 65 кусков.

Ответ: 65 кусков.

5.2. Имеется шесть сосудов ёмкостью 1, 2, 3, 4, 5 и 6 литров. Первый и шестой сосуды пустые, второй и пятый полностью заполнены сиропом, а третий и четвёртый полностью заполнены водой. Никаких других ёмкостей и никаких мер объёма нет. Можно ли с помощью переливаний получить ровно 14 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа (возможно, какие-то сосуды при этом окажутся пустыми)? Ответ обоснуйте.

Решение:

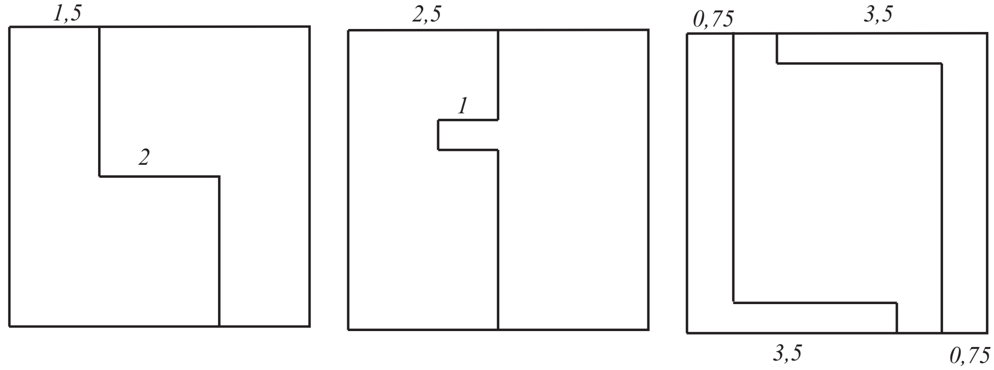
Перельём по 3 литра из трёхлитрового и пятилитрового сосуда в шестилитровый — получится 6 литров нужной смеси. Потом с помощью литрового сосуда перельём 2 литра воды из четырёхлитрового в трёхлитровый. В четырёхлитровом останется 2 литра воды. Перельём туда 2 литра из двухлитрового — получится 4 литра нужной смеси. Всё остальное соберём в пятилитровом — получится ещё 4 литра.

Ответ: можно.

5.3. Разрежьте (без остатка) квадрат, периметр которого равен 20, на несколько многоугольников, периметр каждого из которых равен 17.

Решение:

Если периметр квадрата равен 20, то его стороны равны 5. Некоторые примеры разрезаний на части с периметром 17 указаны на рисунке.



К решению задачи 5.3

5.4. На доске написаны три различных натуральных числа. Если наибольшее из них увеличить на 1, то произведение всех трёх чисел станет равно 36. Если вместо этого наименьшее из них увеличить на 1, то произведение всех трёх чисел станет равно 64. А какое будет произведение всех трёх чисел, если на 1 увеличить среднее число? Ответ обоснуйте.

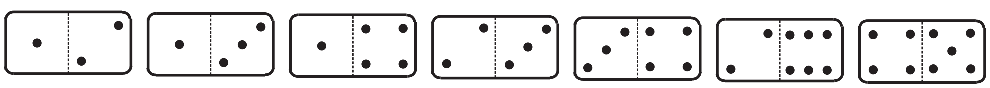
Решение:

Если к наибольшему из различных чисел добавить единицу, то числа останутся различными. Представить число 36 в виде произведения трех различных чисел можно четырьмя способами: $36 = 18 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 6 \cdot 3 \cdot 2$. Это значит, что исходный набор чисел был одним из следующих: $\{17, 2, 1\}$, $\{11, 3, 1\}$, $\{8, 4, 1\}$, $\{5, 3, 2\}$. Теперь, если наименьшее из чисел набора увеличивать на 1, то произведение 64 получится только для набора $\{8, 4, 1\}$. Следовательно, набор был именно таким. Если увеличить среднее число, то произведение будет равно $8 \cdot 5 \cdot 1 = 40$.

Ответ: 40.

5.5. У Андрея есть семь доминошек (см. рисунок). Он хочет выложить в цепочку шесть из них по правилам домино: можно прикладывать друг к другу доминошки так, чтобы соприкасающиеся половинки содержали одинаковое количество точек. Сможет ли он сделать это? Если да, то приведите пример такой цепочки; если нет, то объясните, почему.

Решение:



К условию задачи 5.5

В цепочке к каждой половинке доминошки прикладывается такая же, следовательно, все половинки доминошек, не лежащие с краю цепочки, должны разбиваться на пары одинаковых. Таким образом, общее число половинок с одинаковым числом точек будет чётным (за исключением тех, что по краям). В наборе у Андрея количество половинок каждого вида нечётно. Это значит, что в цепочке не будут участвовать по крайней мере 4 половинки доминошек. Остаётся только 10 половинок, т. е. максимум 5 доминошек.

Ответ: не сможет.

5.6. На новогодний утренник пришли 30 девочек и несколько мальчиков, причем некоторые из детей были знакомы между собой. В огромном мешке под ёлкой Дед Мороз оставил 2017 подарков. Сначала каждая девочка подарила по одному подарку из мешка каждому знакомому ей мальчику. Затем каждый мальчик подарил по одному подарку из мешка каждой незнакомой ему девочке. Несколько подарков остались в мешке. Какое наименьшее количество подарков могло остаться, и сколько в этом случае было мальчиков? Ответ обоснуйте.

Решение:

Обозначим количество мальчиков через k. Тогда количество пар «мальчик — девочка» будет равно $30k$. Каждая из этих пар либо знакома, либо не знакома между собой. В первый раз будет подарено столько подарков, сколько знакомых пар. Во второй раз будет подарено столько подарков, сколько незнакомых пар. Таким образом, будет подарено ровно $30k$ подарков. Это число делится на 30. Максимальное число, которое делится на 30 и не превосходит 2017, равно $2010 = 30 \cdot 67$. Значит, в мешке останется 7 подарков, а количество мальчиков при этом равно 67.

Ответ: 7 подарков, 67 мальчиков.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

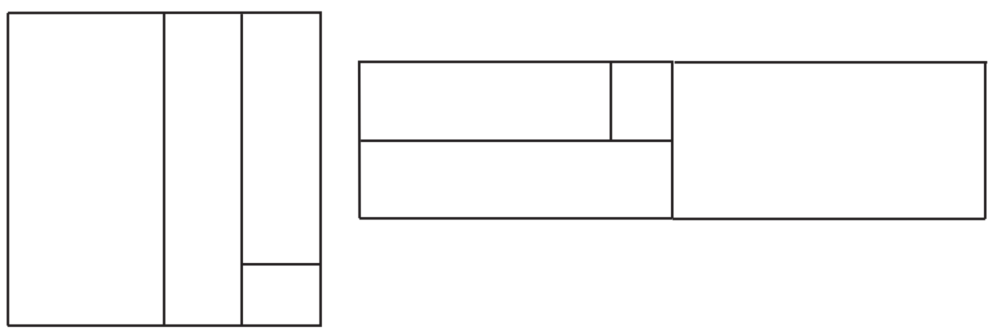
6 класс

РЕШЕНИЯ

6.1. Разрежьте (без остатка) квадрат на 4 различные части так, чтобы из них можно было составить прямоугольник, не являющийся квадратом. Нарисуйте, как нужно разрезать квадрат и как потом составить прямоугольник.

Решение:

Разрежем квадрат 4×4 и переложим в виде прямоугольника 2×8 — см. рисунок.



К решению задачи 6.1

6.2. В записи натурального числа 679854 использованы шесть последовательных цифр: 4, 5, 6, 7, 8, 9. Найдите следующее за ним бóльшее шестизначное натуральное число, в записи которого также используются шесть последовательных цифр (возможно, других). Ответ обоснуйте: докажите, что между найденным числом и числом 679854 нет других чисел такого вида.

Решение:

Рассмотрим данное нам число 679854. В этом же десятке не может быть искомого числа, так как в старших разрядах использованы все цифры, большие 4. Аналогично, в этой же сотне не может быть искомого числа, так как использованы все цифры, большие 5. В этой же тысяче не может быть искомого числа, так как использована цифра 9. Следовательно, искомое число не меньше, чем 680000. В этом числе использована цифра 8, т. е. минимальный набор последовательных цифр — от 3 до 8. Наименьшее число, которое можно составить при этом, — 683457.

Ответ: 683457.

6.3. В зале собрались 1009 мудрецов. У них было 2017 карточек, пронумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2017. При этом у старшего мудреца была одна карточка, у каждого из остальных — по две. Все мудрецы знают числа только на своих карточках. Каждый, кроме старшего мудреца, сказал: «Я знаю, что я не могу отдать старшему мудрецу никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у старшего мудреца? Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Если у одного из мудрецов есть карточка с числом 1, то он должен быть уверен, что у старшего мудреца нет карточки с числом 2017. В этом можно быть уверенным только тогда, когда карточка с числом 2017 тоже в руках у этого мудреца. Точно так же, мудрец с карточкой, на которой написано число 2, имеет ещё и карточку с числом 2016, с карточкой, на которой стоит число 3, — ещё и карточку с числом 2015, и т. д. Все карточки у мудрецов разобьются на пары с суммой 2018. Но на такие пары разбиваются все карточки, кроме карточки с числом 1009. Именно она у старшего мудреца.

Способ 2. Пусть у старшего мудреца на руках карточка с числом a. Тогда карточки с числом $2018 - a$ нет на руках ни у одного из остальных мудрецов, иначе он бы не смог сделать заявление, указанное в условии задачи. Но это значит, что карточка с числом $2018 - a$ тоже у старшего мудреца. Так как у него на руках только одна карточка, то $a = 2018 - a$, откуда $a = 1009$.

Ответ: 1009.

6.4. Карлсон решил похудеть. Для этого он ест только один раз в сутки — либо в ужин, либо в обед, либо в завтрак. Известно, что если он в какой-то день позавтракает, то на следующий день он пообедает. Если он пообедает, то на следующий день он завтракать не будет. Если он поужинал, то на следующий день он позавтракает. Карлсон пообедал 10 января, а за всё время с 10 января по 17 февраля включительно пообедал столько же раз, сколько и позавтракал. Когда Карлсон ел 17 февраля? Ответ обоснуйте.

Решение:

Всего в промежутке с 10 января по 17 февраля пройдет 39 дней ($31-9 = 22$ дня в январе и 17 в феврале). Выясним, когда ел Карлсон все эти дни. Между двумя завтраками он хотя бы раз должен пообедать. Тогда поставим в соответствие каждому завтраку последний обед, который был перед ним — разным завтракам будут сопоставлены разные обеды. Так как завтраков и обедов поровну, никаких других обедов не останется. Между обедом и соответствующим ему завтраком обязательно будет ровно один ужин. Таким образом, последовательность в течение всех 39 дней выглядела так: О – У – З – О – У – З – ... Тогда в последний, 39-ый день, Карлсон завтракал.

Ответ: 17 февраля Карлсон завтракал.

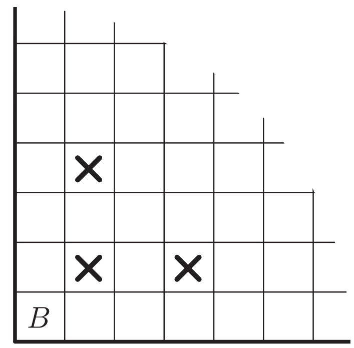
6.5. В противоположных угловых клетках шахматной доски 8×8 стоят Волк и Заяц. Они ходят поочерёдно, Заяц ходит первым. За один ход Заяц может прыгнуть в любую соседнюю по диагонали клетку. Волк за один ход перемещается на одну клетку по вертикали или горизонтали и потом немедленно (в этот же ход) на одну или на три клетки в перпендикулярном направлении. Например, первым ходом Волк может попасть в одну из трех клеток, отмеченных на рисунке. Волк поймает Зайца, если после некоторого хода кого-то из них оба окажутся в одной клетке. Может ли Заяц прыгать так, чтобы никогда не попасть в лапы Волка? Ответ обоснуйте.

Решение:

Во-первых, докажем, что Волк не поймает Зайца на своем ходу. Пронумеруем строки от 1 до 8, пусть изначально Заяц стоит в первой строке, а Волк в восьмой. Тогда Заяц каждым нечётным ходом будет попадать в строчку с чётным номером, а Волк после этого — в строчку с нечётным номером. Каждым чётным ходом все наоборот: Заяц ходит в нечётную строчку, а Волк — в чётную. Следовательно, Волк не поймает Зайца. Во-вторых, докажем, что Заяц может не попадаться в лапы Волку на своем ходу. Единственной ситуацией, где у Зайца нет выбора хода, кроме как в лапы Волка, будет такая: Заяц стоит в углу, а Волк стоит в соседней по диагонали клетке. Посмотрим на ситуацию за ход до этого: Заяц стоял в клетке, соседней с угловой по диагонали. Но из этой клетки есть сразу 4 варианта хода. Волк может запретить только один из них. Значит, в такой ситуации у Зайца есть еще как минимум два способа сходить не в угол. Таким образом, Заяц может никогда не попадаться в лапы Волка.

Ответ: может.

6.6. В каждую клетку таблицы 4×4 записали по одной цифре. При этом оказалось, что сумма четырёх цифр в каждой строчке (начиная со второй) на 2 больше, чем сумма четырёх цифр в предыдущей строчке сверху, а сумма четырёх цифр в каждом столбце (начиная со второго) в 2 раза больше, чем сумма четырёх цифр в предыдущем столбце слева. В правом верхнем углу таблицы стоит цифра 5. Какая цифра стоит в правом нижнем углу? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.



К условию задачи 6.5.

Решение:

Пусть сумма цифр в верхней строчке равна x, а в левом столбце равна y. Тогда сумма цифр в таблице может быть подсчитана двумя способами. По строчкам: $x+(x+2)+(x+4)+(x+6) = 4x+12$. По столбцам: $y+2y+4y+8y = 15y$. Заметим, что $4x + 12 = 4(x + 3)$ делится на 4. Тогда на 4 делится и число $15y$, следовательно, и y. При этом y не может быть равен 0, так как сумма цифр в правом столбце как минимум равна 5. Если $y = 4$, то сумма в последнем столбце равна $8y = 32$. Одна из цифр — 5, т. е. сумма остальных трёх равна 27. Это может быть только в том случае, если все эти цифры (в том числе и правая нижняя) равны 9. Наконец, $y \geqslant 8$ не подходит, так как тогда сумма чисел, стоящих в последнем столбце, будет больше, чем 36.

Ответ: 9.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

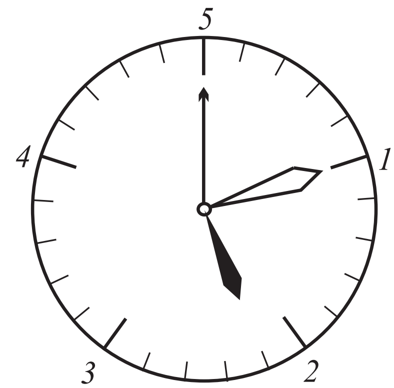
ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

7 класс

РЕШЕНИЯ

7.1. На некой планете в сутках ровно 10 часов, в каждом часе — ровно 25 минут, а в каждой минуте — ровно 25 секунд. Сейчас часы показывают 2 часа 05 минут после полудня (полдень на этой планете наступает в 5 часов 00 минут местного времени). Сколько будет времени (в часах, минутах, секундах), когда минутная стрелка впервые догонит часовую? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 7.1.

Решение:

За 5 часов с полудня до полуночи часовая стрелка проходит 1 круг, а минутная — 5 кругов, т. е. минутная обгоняет часовую ровно на 4 круга. Таким образом, эти две стрелки совпадают каждые 5/4 часа. 2 часа 6 минут после полудня – это больше, чем 5/4, но меньше, чем $10/4 = 2{,}5$ часа. Значит, стрелки совпадут через 2,5 часа после полудня. На часах будет 2 часа 12 минут 12,5 секунд.

Ответ: 2 часа 12 минут 12,5 секунд.

7.2. В зале собрались 1009 мудрецов. У них было 2017 карточек, пронумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2017. При этом у старшего мудреца была одна карточка, у каждого из остальных — по две. Все мудрецы знают числа только на своих карточках. Каждый, кроме старшего мудреца, сказал: «Я знаю, что я не могу отдать старшему мудрецу никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у старшего мудреца? Ответ обоснуйте.

Решение:

<u>Способ 1.</u> Если у одного из мудрецов есть карточка с числом 1, то он должен быть уверен, что у старшего мудреца нет карточки с числом 2017. В этом можно быть уверенным только тогда, когда карточка с числом 2017 тоже в руках у этого мудреца. Точно так же, мудрец с карточкой, на которой написано число 2, имеет ещё и карточку с числом 2016, с карточкой, на которой стоит число 3, — ещё и карточку с числом 2015, и т. д. Все карточки у мудрецов разобьются на пары с суммой 2018. Но на такие пары разбиваются все карточки, кроме карточки с числом 1009. Именно она у старшего мудреца.

<u>Способ 2.</u> Пусть у старшего мудреца на руках карточка с числом a. Тогда карточки с числом $2018 - a$ нет на руках ни у одного из остальных мудрецов, иначе он бы не смог сделать заявление, указанное в условии задачи. Но это значит, что карточка с числом $2018 - a$ тоже у старшего мудреца. Так как у него на руках только одна карточка, то $a = 2018 - a$, откуда $a = 1009$.

Ответ: 1009.

7.3. Семиклассник Петя представил число 2017 в виде суммы трёх натуральных чисел: двузначного, трехзначного и четырехзначного. Для записи этих чисел он использовал 9 различных цифр. Какую цифру он не использовал? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение:

Способ 1. Пусть Петя не использовал цифру x. Тогда $x + 2017 = x + \overline{ab} + \overline{cde} + \overline{fghi} = x + 10a + b + 100c + 10d + e + 1000f + 100g + 10h + i = (x + a + b + c + d + e + f + g + h + i) + (9a + 99c + 9d + 999f + 99g + 9h)$. В первой скобке сумма всех десяти цифр, которая равна 45 и делится на 9, во второй — число, которое тоже делится на 9. Таким образом, число $x+2017$ делится на 9, что возможно только при $x = 8$. Пример таких чисел: $1709+245+63$.

Способ 2. Запишем операцию сложения «в столбик», отметив неизвестные цифры звёздочками:

$$\begin{array}{rcccc} & & & * & * \\ + & & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ \hline & \mathit{2} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{7} \end{array}$$

К решению задачи 7.3.

Теперь видно, что в четырёхзначном числе в разряде тысяч стоит единица. Сумма трёх цифр, стоящих в разряде единиц всех чисел, оканчивается цифрой 7; эти цифры различны, поэтому их сумма не больше 24, а, значит равна либо 7 либо 17. Если она равна 7, то сумма трёх цифр, стоящих в разрядах десятков, либо 11, либо 21, а если 17 — то эта сумма либо 10, либо 20. В каждом из случаев однозначно находится сумма двух цифр, стоящих в разрядах сотен трёх- и четырёхзначного чисел. Результаты можно записать в виде таблицы.

сумма цифр в разрядах единиц	сумма цифр в разрядах десятков	сумма цифр в разрядах сотен	сумма всех цифр
7	11	9	28
7	21	8	37
17	10	9	37
17	21	8	47

Сумма всех десяти цифр равна 45, поэтому сумма девяти из них, использованных Петей, лежит в диапазоне от $45 - 9 = 36$ до $45 - 0 = 45$. Из таблицы видно, что она равна 37. Значит, не использована цифра $45 - 37 = 8$, а примеры легко строятся исходя из таблицы. Так, сумма $90 + 273 + 1654$ реализует вторую строчку таблицы, а сумма $39 + 576 + 1402$ — третью.

Ответ: цифру 8.

7.4. AD и CE — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором сторона AC — наибольшая. Докажите, что $BE + BD \leqslant AC$.

Решение:

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, т. е. $\angle B$ — наибольший. Так как $\angle A \leqslant \angle B$, на стороне AB можно поставить точку Y так, чтобы $\angle BYC = \angle B$ (в случае равенства $\angle A = \angle B$ точка Y совпадёт с точкой A). Аналогично определим точку X (см. рисунок). Тогда $BD + BE = (BX + BY)/2 \leqslant (BC + BA)/2 \leqslant (AC + AC)/2 = AC$.

7.5. Хозяйка магазинчика тётя Нюра решила украшать витрину цветами в течение нескольких дней. Для этого у нее есть N различных горшков с цветами. Тётя Нюра хочет выполнить три условия:

1) ни один горшок не должен находиться на витрине два дня подряд;

2) ни один набор горшков не должен повториться дважды (порядок выставления горшков в наборе не имеет значения);

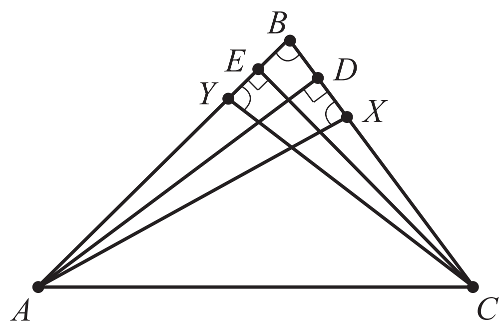
3) витрину нельзя оставлять пустой ни в какой из дней.

а) Сможет ли тётя Нюра украшать витрину в течение 12 дней, если $N = 4$? Ответ обоснуйте.

б) Сможет ли тётя Нюра украшать витрину в течение 13 дней, если $N = 4$? Ответ обоснуйте.

в) Пусть $N = 5$. Известно, что в первый и в последний день тётя Нюра ставила на витрину по 4 горшка. Докажите, что на витрине побывали не все наборы из трёх горшков.

г) Докажите, что тётя Нюра не сможет украшать витрину в течение 54 дней, если $N = 6$.



К решению задачи 7.4.

Решение:

а) Обозначим горшочки числами от 1 до 4. В течение 12 дней можно ставить горшочки в таком порядке: 123, 4, 12, 34, 1, 23, 14, 2, 13, 24, 3, 124.

б) Набор 1234 ставить нельзя — в соседний день ничего не поставишь. Всего есть 4 набора из одного горшочка (1, 2, 3, 4), 6 наборов из двух (12, 13, 14, 23, 24, 34) и 4 набора из трёх (123, 124, 134, 234). Если бы можно было поставить 13 наборов, то как минимум 3 набора из трёх горшочков побывают на витрине. Значит, хотя бы один такой набор (без ограничения общности будем считать, что это набор 123) появится на витрине не в первый и не в последний день. Но тогда и днём раньше, и днём позже на витрине должен быть набор из одного горшка с номером 4. А повторять наборы нельзя. Противоречие.

в) Наборов из одного горшочка — 5, из трёх — $5 \cdot 4 \cdot 3/3! = 10$. Если взять набор из четырёх горшочков, то соседним с ним обязательно будет набор из одного горшочка. Если взять набор из трёх горшочков, то за день до и за день после него не могут стоять наборы из двух горшочков — иначе они будут одинаковые. Значит, хотя бы в один из этих двух дней тоже будет набор из одного горшочка. Если бы тётя Нюра смогла выставить все наборы из трёх горшочков, то было бы ровно 10 пар дней вида «набор из 1 — набор из 3» и ещё как минимум 2 пары дней вида «набор из 1 — набор из 4», т. е. пар хотя бы 12. Но всего наборов из одного горшочка 5, и образовать они могут не больше 10 таких пар. Противоречие. Значит, на витрине появятся не все наборы из трёх горшочков.

г) Наборов из одного и из пяти горшочков — 6, из двух и из четырёх — $6 \cdot 5/2! = 15$, из трёх — $6 \cdot 5 \cdot 4/3! = 20$, набор из 6 горшочков ставить нельзя. Назовём наборы из одного и двух горшочков *маленькими*, остальные — *большими*. Большие наборы из четырёх или пяти горшочков не могут идти подряд, так как в них будут одинаковые горшочки, причём и до, и после них обязательно должен быть маленький набор. Два больших набора из трёх горшочков могут идти подряд, а вот три уже не могут: первый и третий будут совпадать. При этом до и после тоже должны быть маленькие наборы. Так как всего наборов из трёх горшочков 20 штук, таких пар может быть максимум 10.

Во всем ряду группы, образованные большими и маленькими наборами, чередуются. Всего маленьких наборов — 21, т. е. групп из больших наборов может быть не больше 22, а самих наборов не может быть больше $10 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 32$. Следовательно, суммарное количество маленьких и больших наборов не превосходит $21 + 32 = 53$.

Ответ: а) да; б) нет.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

8 класс

РЕШЕНИЯ

8.1. Докажите, что если положительные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2 + a + b = ab + a^2 + b^2,$$

то хотя бы одно из них равно единице.

Решение:

Преобразуем равносильным образом уравнение:

$$a^2b^2 + a + b = ab + a^2 + b^2$$
$$a^2b^2 - a^2 + a - ab + b - b^2 = 0$$
$$a^2(b^2 - 1) + a(1 - b) + b(1 - b) = 0$$
$$(b - 1)(a^2(b + 1) - a - b) = 0$$
$$(b - 1)(a^2b - b + a^2 - a) = 0$$
$$(b - 1)(b(a^2 - 1) + a(a - 1)) = 0$$
$$(b - 1)(a - 1)((b(a + 1) + a) = 0.$$

Выражение в последней скобке положительно, так как положительны числа a и b, поэтому данное уравнение равносильно условию $(b - 1)(a - 1) = 0$, которое выполняется тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел a, b равно 1.

8.2. Из двух приложенных друг к другу прямоугольников составлен невыпуклый шестиугольник. Требуется, используя только линейку без делений, провести прямую, делящую шестиугольник на два многоугольника, имеющих одинаковую площадь.

Решение:

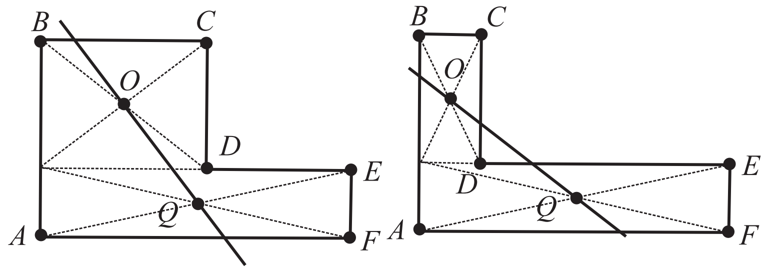
Обозначим исходный шестиугольник как $ABCDEF$ и достроим его до прямоугольника $ABGF$ — см. рисунок. Пусть O и Q — центры прямоугольников $ABGF$ и $CDEG$ соответственно. (И указанное построение, и нахождение точек Q и O легко делаются одной линейкой.) Проведём прямую QO. Она требуемая. Докажем это.

Любая прямая, проходящая через центр прямоугольника делит его на два равных многоугольника, поэтому делит его площадь пополам. Значит, в полуплоскости с границей QO и содержащей точку C лежит ровно половина площади прямоугольника $ABGF$, ровно половина площади прямоугольника $CDEG$, а, значит, и половина площади фигуры, являющейся их разностью. Но эта фигура по построению и есть данный невыпуклый шестиугольник. Вывод: прямая QO делит площадь шестиугольника $ABCDEEF$ пополам.

Остаётся показать, что прямая QO делит шестиугольник $ABCDEF$ на два (а не на три) многоугольника. В самом деле, любая прямая, проходящая через точку Q (прямая OQ в частности), пересекает либо отрезки CD и EG, либо отрезки CG и DE. В обоих случаях эта прямая пересекает границу шестиугольника $ABCDEF$ ровно в двух точках:

если есть пересечение со стороной CD, то вторая точка будет лежать на одной из сторон CB, BA или AF, во втором случае — на одной из сторон EF, FA или AB.

Примечание. У задачи, на первый взгляд, существует аналогичное решение, связанное с представлением шестиугольника в виде объединения (а не разности) двух прямоугольников (см. рисунок слева). Однако такое «решение» проходит не всегда, так как построенная прямая в этом случае может разрезать шестиугольник не на две, а на три части (см. рисунок справа), следовательно, решением в общем случае не является.



К решению задачи 8.2. Решение, которое не всегда проходит

8.3. Существуют ли 6 различных натуральных попарно взаимно простых чисел a, b, c, d, e, f таких, что число $ab + cd + ef$ делится нацело на каждое из этих чисел? Ответ обоснуйте. (Напомним, что два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1.)

Решение:

Способ 1. Пусть такие числа существуют, и пусть среди чисел ab, cd, ef число ab — наибольшее. Так как число ab делится и на a, и на b, то число $cd + ef$ тоже должно делиться и на a, и на b, т. е. на ab. С другой стороны, $cd + ef < 2ab$, поэтому $cd + ef = ab$. Следовательно, $ab + cd + ef = 2ab$, т. е. число 2 должно делиться на все четыре числа c, d, e, f. Но у числа 2 только 2 натуральных делителя. Противоречие.

Способ 2. Так как числа взаимно просты, сумма $ab+cd+ef$ делится на $abcdef$ нацело. Поделим на $abcdef$, получится $1/cdef + 1/abef + 1/abcd$. Каждая из этих дробей не больше $1/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) = 1/30$, а значит, сумма не может быть целым числом.

Ответ: нельзя.

8.4. Аладдин и Джинн строят воздушные замки. В первую ночь Джинн строит один замок; утром Аладдин даёт ему название на арабском языке. Каждую следующую ночь Джинн строит новый воздушный замок и соединяет его мостами с некоторыми построенными ранее замками, возможно, ни с какими. Каждый мост соединяет ровно два замка, один из которых построен в ту же ночь, что и мост. При этом Джинн может соединять замки мостами лишь так, чтобы ни для каких двух замков не существовало более одной последовательности разных мостов, по которым можно добраться от одного замка до другого. Наутро Аладдин даёт вновь построенному замку имя на арабском языке. При выборе имени Аладдин руководствуется правилом: первая буква имени нового замка должна отличаться от первых букв имён тех замков, с которыми новый замок соединён мостами. Может ли Джинн действовать таким образом, что Аладдину для названий замков не хватит всех 28 букв арабского алфавита, какие бы имена Аладдин не выбирал? Ответ обоснуйте.

Решение:

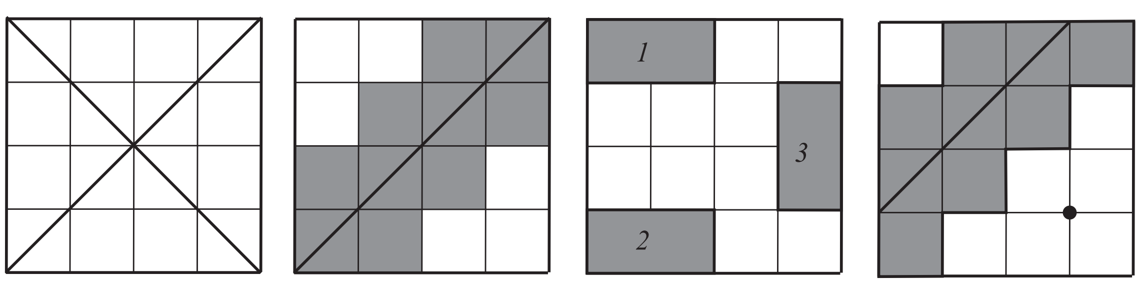
Покажем, что Джинн может строить замки и мосты и туннели так, что Аладдину не хватит для их названия никакого наперёд заданного количества начальных букв. Предположим, что это не так, т. е. существует такой набор начальных букв, которого Аладдину хватит для названия замков при любых действиях Джинна. Рассмотрим минимальный (по количеству букв) набор с таким свойством. Пусть в нём n букв. В силу минимальности Джинн может построить некоторое множество замков и связывающих их мостов так, что Аладдину для их названия все n начальных букв потребуются. Пусть теперь Джинн построит n таких множеств A_1, A_2 $\ldots$, A_n не связывая замки одного множествами с замками другого. Аладдин для названия замков каждого набора использует все n букв в качестве начальных. Теперь пусть Джинн построит ещё один замок и соединит его n мостами так: i-й мост ($1 \leqslant i \leqslant n$) соединяет вновь построенный замок и один из замков набора A_i, название которого начинается с i-й буквы. (Очевидно, такое построение допустимо.) Тогда Аладдин не сможет присвоить вновь построенному замку имени, начинающегося с любой из n букв набора. Противоречие.

Ответ: может.

8.5. Вася и Петя играют в морской бой по новым правилам. Игровое поле — это квадрат 4×4 клетки на листе клетчатой бумаги. k-палубная подводная лодка — это прямоугольник $1 \times k$ клеток со сторонами, идущими по линиям сетки. Подводные лодки могут располагаться на игровом поле как вертикально, так и горизонтально, но никакие две лодки не могут соприкасаться друг с другом (даже углами). Выстрелы производятся торпедами; каждый выстрел представляет собой некоторую прямую (вертикальную, горизонтальную или наклонную), проходящую через игровое поле. При этом все лодки, которые данная прямая задела (хотя бы в одной точке) считаются потопленными. Найдите наименьшее число выстрелов, которые достаточно сделать Пете, чтобы гарантировано потопить хотя бы одну Васину лодку, если Петя не знает, где выставлены Васины лодки, но знает, что Вася выставил:

а) одну 1-палубную и одну 3-палубную лодку;
б) одну 2-палубную лодку;
в) две 2-палубные лодки;
г) две 1-палубные лодки;
д) одну 1-палубную и одну 2-палубную лодку.

Решение:



К решению задачи 8.5 (пункты а — в).

Двух выстрелов хватит, чтобы потопить все подводные лодки Васи: достаточно провести прямые, проходящие через диагонали квадрата — они имеют общие точки со всеми клетками игрового поля (см. первый рисунок слева). Таким образом, вопрос каждого из пунктов можно переформулировать так: хватит ли Пете одного выстрела? Заметим, что одного выстрела хватит тогда и только тогда, когда найдётся такая прямая, что на клетках, которые эта прямая не пересекает (хотя бы по точке) невозможно разместить все Петины лодки.

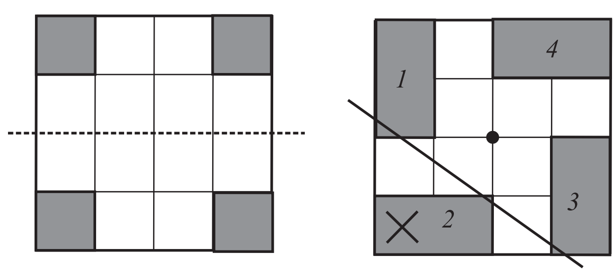
а) Одного выстрела хватит. Достаточно провести прямую через любую диагональ квадрата. Она заденет 10 клеток (см. второй рисунок слева, задетые клетки серого цвета). На оставшихся 6 клетках трёхпалубная лодка, очевидно, не поместится.

б) Покажем, что одного выстрела не хватит. Предположим противное. Тогда у Пети есть такая прямая — выстрел l, которая задевает любой прямоугольник 1×2. Рассмотрим три таких прямоугольника, расположенных так, как указано на третьем слева рисунке. По предположению прямая l имеет общие точки с прямоугольниками 1 и 2 на рисунке. Но тогда она не имеет с прямоугольником 3 общих точек. Противоречие.

в) Одного выстрела хватит — см рисунок справа. Действительно, он оставляет не задетыми только 7 клеток: одноклеточную зону, примыкающую к левому верхнему углу (в ней не поместится ни одной 2-палубной лодки) и шестиклеточную, примыкающую к правому нижнему. В этой зоне не может поместится двух 2-палубных лодок, так как каждая такая лодка обязательно касается узла, отмеченного на рисунке чёрной точкой, а лодки по условию общих точек не имеют.

г) Одного выстрела не хватит. Предположим противное. Тогда существует такая прямая l, что в клетках, с которыми она не пересекается, нельзя поставить две правильно расположенные 1-палубные лодки.

Рассмотрим 4 угловые клетки игрового поля. Тогда прямая l должна иметь общие точки хотя бы с тремя из них (иначе на тех двух угловых клетках, которых она не касается, можно поставить две 1-палубные лодки). Среди этих трёх угловых клеток есть две, прилежащие к одной стороне квадрата, без ограничения общности, к нижней. Но любая прямая, касающаяся этих квадратов, пересекает игровое поле по отрезку, лежащему ниже средней линии (пунктирная линия на левом рисунке), поэтому она не касается двух верхних угловых клеток. Значит, прямая l существовать не может. Противоречие.



К решению задачи 8.5 (пункты г — д).

д) Одного выстрела не хватит. Предположим, от противного, что существует такая прямая l, что в клетках, которые она не задевает, нельзя правильным образом расположить 1-палубную и 2-палубную лодки.

Рассмотрим четыре прямоугольника, расположенных так, как показано на рисунке справа: Пусть среди них есть два, которые прямая l не задевает. Тогда на месте одного из этих прямоугольников разместим 2-палубную лодку, а в одной клеток второго — 1-палубную. Расположение лодок будет правильным, и прямая l ни одну из них не потопит — противоречие. Итак, двух прямоугольников, не задетых прямой l, нет, т. е. прямая l задевает хотя бы три из рассматриваемых прямоугольников. Без ограничения общности это прямоугольники 1, 2 и 3; остальные три случая аналогичны ввиду симметрии. Поставим 2-палубную лодку на место прямоугольника 4, а 1-палубную — в угловую клетку поля, содержащуюся в прямоугольнике 2 — на рисунке она обозначена крестом. Докажем про прямую l два утверждения.

Утверждение 1. Прямая l не задевает прямоугольника 4.

Доказательство. Прямая l не может быть ни вертикальной (иначе она не могла бы задевать одновременно прямоугольники 2 и 3) ни горизонтальной (иначе она не могла бы задевать одновременно прямоугольники 2 и 1). Если прямая l идёт в направлении «вправо и вверх» (т. е. при движении вдоль прямой l слева направо увеличивается расстояние от нижней границы игрового поля), то она должна, во-первых, проходить ниже центра квадрата (чтобы задеть прямоугольник 3), а во-вторых, выше центра квадрата (чтобы задеть прямоугольник 1). Это невозможно, значит, прямая l идёт в направлении «вправо и вниз» (как на рисунке). Тогда прямая l проходит ниже центра квадрата (чтобы задеть прямоугольник 2), поэтому она не может задеть прямоугольник 4.

Утверждение 2. Прямая l не задевает той угловой клетки игрового поля, которая лежит в прямоугольнике 2 (на рисунке эта клетка помечена крестиком).

Доказательство. Предположим противное. Тогда прямая l задевает и указанную клетку, и прямоугольник 1. Но тогда она не может задеть прямоугольника 3. Противоречие.

Из утверждений 1 и 2 следует, что прямая l не касается правильно расположенной пары 1-палубной и 2-палубной лодки, что противоречит выбору прямой l.

Ответ: а) 1 выстрел. б) 2 выстрела. в) 1 выстрел. г) 2 выстрела. д) 2 выстрела.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

2016 — 2017 учебный год

9 класс

РЕШЕНИЯ

9.1. Петя написал 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых двух написанных чисел не делится на 17 нацело. Какая наименьшая возможная сумма всех двадцати чисел, написанных Петей? Ответ обоснуйте.

Решение:

Рассмотрим остатки от деления на 17 всех выписанных Петей чисел. Условие означает, что во-первых, среди этих остатков не более одного нуля, а во-вторых, что если присутствует ненулевой остаток b, то нет остатка $17 - b$. Если в наборе имеется число, дающее при делении на 17 ненулевой остаток $b \geqslant 9$, то сумму чисел набора можно уменьшить, уменьшив одновременно все такие числа на величину $2b - 17$ — очевидно, что полученный таким образом новый набор по-прежнему будет удовлетворять всем условиям задачи. Значит, в наборе с минимальной суммой могут быть только числа, дающие при делении на 17 остатки 0, 1, …, 8, при этом остаток 0 может дать только одно число. Ясно, что всякий набор с таким свойством подходит. Наименьший такой набор — это $\{1, 2, \ldots, 8, 17, 18, \ldots 25, 35, 36, 37\}$. Сумма чисел этого набора равна

$$\frac{1+8}{2} \cdot 8 + \frac{17+25}{2} \cdot 9 + 108 = 333.$$

Это и есть ответ.

Ответ: 333.

9.2. На окружности с центром O выбрали точки C и D по одну сторону от диаметра AB, причём точка C лежит на дуге AD, не содержащей точку B. Пусть E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на отрезки OC и AB соответственно. Оказалось, что DE — биссектриса угла ADC, а DO — биссектриса угла ADF. Найдите угол CAD. Ответ обоснуйте.

Решение:

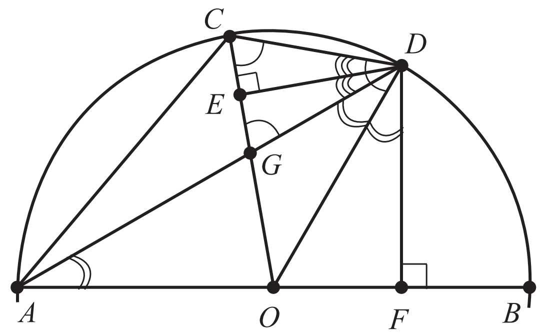
Треугольник AOD равнобедренный ($OD = OA$, как радиусы), значит, $\angle OAD = \angle ODA$. Поскольку DO — биссектриса угла ADF, то $\angle OAD = \angle ODF$. Подсчёт углов в прямоугольном треугольнике AFD показывает, что $\angle OAD = 30°$. Обозначим за G точку пересечения отрезков AD и OC. Отрезок DE является высотой и биссектрисой в треугольнике DGC; тогда этот треугольник равнобедренный с углом ECD при основании. Треугольник OCD также является равнобедренным с углом ECD при основании, следовательно, углы при вершинах этих двух треугольников также будут равны, т. е. $\angle CDG = \angle COD$. Пусть $\angle CDG = \angle COD = \alpha$, тогда $\angle GCD = \angle ODC = 30° + \alpha$. Подсчитав сумму углов треугольника COD, получим, что $\alpha = 40°$. Искомый угол CAD вписанный и опирается на ту же дугу, что и центральный угол DOC, поэтому $\angle CAD = 20°$.

Ответ: $20°$.

9.3. Решите систему уравнений $\begin{cases} a - \dfrac{b}{c} &= bc \\ b - \dfrac{c}{a} &= ca \\ c - \dfrac{a}{b} &= ab \end{cases}$.

Решение:

Заметим, что ни одно из чисел a, b, c не может быть равно нулю. Из первого уравнения системы выразим a: $a = bc + \dfrac{b}{c}$. Домножим обе части первого уравнения на c, получим $ca = bc^2 + b$. Подставим получившиеся выражения для a и ac во второе уравнение системы:



К решению задачи 9.2

$$b - \frac{c}{bc + \frac{b}{c}} = b + bc^2,$$

откуда

$$-\frac{c^2}{bc^2 + b} = bc^2.$$

Сократив обе части на c^2 и домножив на $bc^2 + b$, получим $-1 = b^2 \cdot c^2 + b^2$. Правая часть получившегося уравнения неотрицательна, поэтому решений у уравнения нет, а, следовательно, нет решений и у системы.

Ответ: нет решений.

9.4. Есть три сосуда объёмом 3, 4 и 5 литров. Кроме того, есть кран с водой и раковина для слива воды. В самом маленьком сосуде налито 3 литра сиропа; остальные сосуды пусты. Можно ли с помощью переливаний получить ровно 6 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа (возможно, какой-то сосуд при этом окажется пустым)? Ответ обоснуйте.

Решение:

<u>Способ 1.</u> Приведём нужную последовательность операций.

<u>Шаг 1.</u> Не трогая трёхлитровый сосуд добиваемся того, чтобы в четырёхлитрововм сосуде осталось ровно 2 л воды (пятилитровый при этом оставляем пустым). Это можно сделать, например, так: наполняем водой пятилитровый сосуд, затем наполняем из него четырёхлитровый и выливаем из четырёхлитрового всё в раковину, выливаем из пятилитрового оставшийся там 1 литр воды в четырёхлитровый, а пятилитровый наполняем из крана, снова дополняем четырёхлитровый из пятилитрового, а затем опорожняем четырёхлитровый. Теперь в пятилитровом сосуде ровно 2 л воды, переливаем её в опустевший четырёхлитровый сосуд.

<u>Шаг 2.</u> Дополняем 4-х литровый сосуд сиропом из трёхлитрового, а оставшийся сироп выливаем в пятилитровый сосуд. Теперь трёхлитровый сосуд пуст, четырёхлитровый полон 50% смесью воды с сиропом, а в пятилитровом ровно 1 литр сиропа.

<u>Шаг 3.</u> Наполняем трёхлитровый сосуд смесью из четырёхлитрового, и опорожняем его в пятилитровый, который после этого дополняем водой из-под крана. Теперь у нас

есть 1 л смеси в четырёхлитровом сосуде и 5 л в пятилитровом; всего 6 л смеси. При этом в сосудах имеется 3 литра сиропа и $6 - 3 = 3$ литра воды. Смесь в четырёх литровом сосуде 50%-я, т. е. нём пол-литра воды и пол-литра сиропа. Тогда в пятилитровом воды и сиропа по полтора литра — поровну. Условие задачи выполнено.

Способ 2. Приведём нужную последовательность операций.

Шаг 1. Не трогая трёхлитровый сосуд добиваемся того, чтобы в четырёхлитрововм сосуде остался ровно 1 л воды (пятилитровый при этом оставляем пустым). Это можно сделать, например, так: наполняем водой пятилитровый сосуд, затем наполняем из него четырёхлитровый и выливаем из четырёхлитрового всё в раковину, наконец, оставшуюся в пятилитровом сосуде воду переливаем в опустевший четырёхлитровый.

Шаг 2. Выливаем весь сироп в 4-х литровый сосуд (теперь он полон 75% раствором сиропа).

Шаг 3. Манипулируя только трёх- и пятилитровым сосудами добьёмся, чтобы в трёхлитровом сосуде остался ровно 1 литр воды. Например, можно наполнить водой трёхлитровый сосуд, вылить всё из него в пятилитровый, снова набрать трёхлитровый и из него дополнить пятилитровый доверху. Пятилитровый сосуд делаем пустым.

Шаг 4. Дополняем трёхлитровый сосуд доверху из четырёхлитрового; в него попадёт ровно половина всего сиропа, т. е. полтора литра. Таким образом, в нём образуется 50% раствор сиропа.

Шаг 5. Выливаем содержимое трёхлитрового сосуда в пятилитровый и в опустевший трёхлитровый выливаем оставшиеся два литра из четырёхлитрового сосуда. Теперь в трёхлитровом сосуде 1,5 л сиропа и 0,5 л воды.

Шаг 6. Дополняем трёхлитровый сосуд водой из-под крана. Задача решена.

Ответ: можно.

9.5. Расстояние между городами A и B равно 1000 км. Через каждые 100 км дороги расположена деревня; других населённых пунктов поблизости нет. Турист совершает многодневный пеший поход по дороге из A в B, делая ночёвки в произвольных местах пути.

Назовём *размахом похода* длину наибольшего из дневных переходов и *отчуждённостью похода* — наименьшее из расстояний от пунктов ночёвки до населённых пунктов.

а) Какое наименьшее число дней мог длиться поход, если его размах равен 50 км, а отчуждённость равна 25 км? Ответ обоснуйте.

б) Какое наименьшее число дней мог длиться поход, если его размах равен 40 км, а отчуждённость равна 20 км? Ответ обоснуйте.

в) Какова наибольшая возможная отчуждённость похода, если его размах равен 40 км, а поход длился 26 дней? Ответ обоснуйте.

г) Пусть размах похода равен 30 км, а поход длился n дней (n — натуральное число, большее 33). Для каждого n найдите наибольшее значение отчуждённости похода. Ответ обоснуйте.

Решение:

а) Между двумя населёнными пунктами, расположенными последовательно, есть хотя бы два места ночёвки (если такое место одно, то оно точно посередине, и при этом предыдущая и последующая ночёвки должны быть в населённых пунктах, а тогда отчуждённость равна нулю). Значит, всего было не менее $2 \cdot 10 = 20$ ночёвок, и поход продолжался не менее 21 дня.

Пример 21-дневного похода: ночёвки осуществлялись в точках, удалённых от ближайшего населённого пункта на 25 км и только в них.

б) Рассмотрим произвольную деревню. Расстояние от неё до ближайшего к ней пункта ночёвки не менее 20 км как в одну так и в другую сторону, поэтому расстояние между этими двумя пунктами не менее 40 км. Но оно не превосходит размаха похода, т. е. оно не более 40 км. Значит, все точки пути, отстоящие от деревень на 20 км — это места ночёвок. Между любыми двумя деревнями поэтому есть по крайней мере три места ночёвок: два на расстояниях 20 км от от деревень и по крайней мере одно между этими двумя. На первом и последнем участках пути (от города A до первой деревни и от последней деревни до города B) как минимум есть два места ночёвок, значит всего ночёвок было не менее $3 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 28$, а поход длился не менее 29 дней.

Пример 29-дневного похода: ночёвки осуществлялись в 40 км от каждого города, в 20 км в обе стороны от каждой деревни и ровно посередине между деревнями.

в) Можно считать, что в деревнях ночёвок не было — иначе $D = 0$, что явно не максимум. Маршрут разбит деревнями на 10 стокилометровых отрезков пути, и ясно, что при прохождении каждого такого отрезка турист ночевал по крайней мере дважды. Всего ночёвок было на одну меньше, чем дней, которые длился поход, т. е. ночёвок было 25. Значит, было не менее 5 отрезков, на каждый из которых пришлось ровно две ночёвки. Из этих отрезков есть такой, который заключён между деревнями. Обозначим деревни как C и D, а места двух ночёвок между ними как X и Y. Тогда $CX + XY + YD = CD = 100$, $XY \leqslant 40$, поэтому $CX + DY \geqslant 60$ (все расстояния в километрах). По принципу Дирихле хотя бы одно из расстояний CX или DY (без ограничения общности CX) не менее 30 км. Рассмотрим место предыдущей ночёвки перед ночёвкой в пункте X — точку Z. $40 \geqslant ZX = ZC + CX$, $CX \geqslant 30$, поэтому $ZC \leqslant 10$. Значит, удалённость похода не может превысить 10 км.

Пример похода с удалённостью 10: ночёвки были на следующих расстояниях от города A (в км): 40, 80, 120, 150, 190, 230, 270, 310, 350, 390, 430, 470, 510, 550, 590, 630, 670, 710, 750, 790, 830, 870, 910, 950, 970.

г) Отчуждённость похода не может превышать половины размаха. Значит, при любом $n > 33$ $D \leqslant 15$. Чтобы $D = 15$ необходимо, чтобы ночёвки осуществлялись на расстоянии 15 км от каждой из деревень, как в ту, так и в другую сторону. Тогда на пути между двумя деревнями есть два места ночёвок на расстояниях 15 и 85 км от первой деревни; расстояние между ними 70 км, значит, на этом участке есть место ещё по крайней мере двух ночёвок. Итого: 4 ночёвки между деревнями и по три на каждом из участков от города до деревни — всего $4 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 38$ ночёвок или 39 дней пути. При этом 39-дневный поход легко строится по аналогии с пунктом б).

Ясно также, что при $n > 39$ существует поход с удалённостью 15: можно считать, что в «лишние» дни турист отдыхал и никуда не переходил, ночуя на одном и том же месте несколько раз.

Пусть теперь $n \leqslant 38$, т. е. ночёвок было 37 или меньше. Повторяя рассуждения из пункта в) находим, что на некотором участке пути от деревни C до деревни D турист сделал три ночёвки. Расстояние между местами первой и последней из этих ночёвок не более 60 км, поэтому либо расстояние от первой из них до C, либо расстояние от последней до D больше или равно $\dfrac{100-60}{2} = 20$ км. Тогда, рассуждая как в пункте в, найдём, что $D \leqslant 10$.

Построим поход с размахом 30, удалённостью 10 с возможно меньшим числом ночёвок. Сначала идём в день по 30 км: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270 (указываем расстояния от мест ночёвок до города A). Следующую ночёвку будем делать на 290 км (прошли 20 км за день), далее снова ежедневно проходим 30-километровые участки до 470-го километра, следующая ночёвка на 490, опять 30 километровыми переходами до 670, 20-километровый до 690, 30-километровыми до 870, 20-километровыми до 890, 30-километровыми до 980 и 20-километровым до пункта B. Всего сделали 5 переходов по 20 км, остальные — по 30 км и уложились в 35 дней. Значит, при $35 \leqslant n \leqslant 38$ наибольшая удалённость похода равна 10.

Остаётся рассмотреть случай $n = 34$. В этом случае всего 33 ночёвки; на первом и последнем 100-километровом участке пути не менее, чем по три ночёвки, значит на 800-километровом участке между первой и последней деревнями ночёвок не более 27. Разделив этот участок на четыре 200-километровых, получим, что на некотором 200-километровом участке (ограниченном двумя деревнями) не более 6 ночёвок. Далее рассуждения как и раньше: расстояние между местами первой и последней из этих ночёвок не больше 150 км, расстояние от одного из этих мест до ближайшей деревни не меньше 25 км, поэтому есть расстояние между местом ночёвки и деревней не большее $30 - 25 = 5$ км.

Пример 34-дневного маршрута с удалённостью 5 строится просто: в первый день проходим 25 км, затем 32 дня по 30 км в последний день 15 км. Ясно что в этом случае расстояние (в километрах) от любого места ночёвки до города A, (а тогда и до любой деревни) оканчивается цифрой 5, что и обеспечивает необходимую удалённость.

Ответ: а) 21 день; б) 29 дней; в) 10 км; г) $\begin{cases} 15 \text{ км} & \text{при} \quad n \geqslant 39 \\ 10 \text{ км} & \text{при} \quad 38 \geqslant n \geqslant 35 \\ 5 \text{ км} & \text{при} \quad n = 34 \end{cases}$.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2016 — 2017 учебный год

10 класс

РЕШЕНИЯ

10.1. Мальвина выписала четыре натуральных числа, а Буратино нашёл для каждой пары этих чисел их наибольший общий делитель. Оказалось, что Буратино получил шесть последовательных натуральных чисел. Не ошибся ли Буратино? Ответ обоснуйте.

Решение:

Буратино ошибся. Действительно, среди шести натуральных чисел подряд ровно два делятся на три нацело. Тогда среди чисел Мальвины как минимум три числа тоже делятся нацело на три. Но в этом случае найдётся не меньше трёх пар чисел, таких, что наибольший общий делитель каждой пары делится нацело на три. А Буратино нашёл таких только две пары. Значит, Буратино ошибся.

Ответ: Буратино ошибся.

10.2. Про положительные числа a, b и c известно, что $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{a}{4c}+\dfrac{b}{4c}=\dfrac{c}{ab}$ и $abc \geqslant 1$. Докажите, что $c \geqslant 1$.

Решение:

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{c}{ab}=\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{4c} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4c}}=\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Умножая обе части неравенства на $abc\sqrt{c}$, получим $c^2\sqrt{c} \geqslant abc$. Так как $abc \geqslant 1$, имеем $c^2\sqrt{c} \geqslant 1$, откуда $c \geqslant 1$. Неравенство доказано.

10.3. На бумаге в клетку нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах сетки так, что ни одна его сторона не идет по линиям сетки. Вася покрасил все горизонтальные линии сетки внутри фигуры в красный цвет, а Петя — все вертикальные в синий. Затем Вася посчитал длину всех красных линий, а Петя — синих. Докажите, что их числа совпали.

Решение:

Покажем, что и тот и другой получили площадь многоугольника. Докажем утверждение для вертикальных отрезков, для горизонтальных доказательство аналогично.

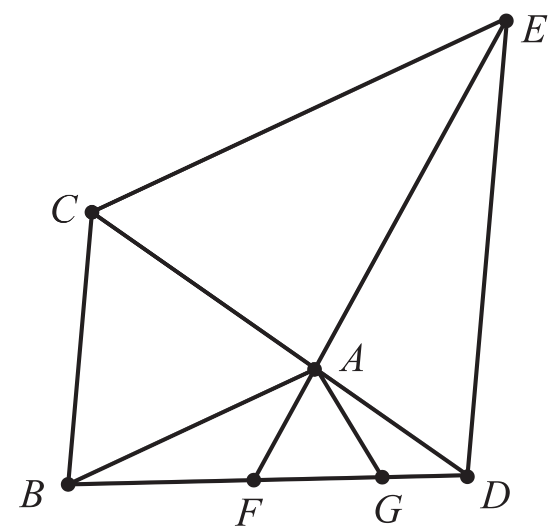
Заметим, что вертикали делят всю фигуру на полосы: два треугольника по краям, а остальные — четырёхугольники. Проведём в каждом четырёхугольнике одну диагональ (например, из верхнего левого угла в нижний правый). Теперь каждый четырёхугольник разделен на два треугольника, причем каждый треугольник смежен со своей вертикалью. С учётом двух крайних треугольников у каждой вертикали ровно два смежных с ней треугольника.

Поскольку высоты, опущенные из каждого треугольника на смежную с ним вертикаль равны единице, то сумма площадей двух смежных с вертикалью треугольников равна длине вертикали. Суммируя по всем вертикалям, получаем общую площадь всех полос, то есть общую площадь всего многоугольника. Таким образом Петино число есть не что иное, как площадь многоугольника.

10.4. В треугольнике BCD на стороне CD отмечена точка A, на стороне BD — точки F и G (точка F лежит между G и B) так, что треугольники ABC и AGF равносторонние. На стороне CD треугольника BCD во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник CDE. Докажите, что точки A, F, E лежат на одной прямой.

Решение:

Способ 1. Заметим, что треугольник CBD поворотом на 60° переводится в треугольник CAE (равенство этих треугольников можно доказать и непосредственно по двум сторонам и угле между ними). Легко видеть, что $\angle ACB + \angle AFB = 180^\circ$ в силу равенства $\angle ACB = \angle AFG = 60^o$. Тогда оставшиеся в четырёугольнике $ACBF$ углы также составляют 180^o. Таким образом $\angle CAF + \angle CBF = 180^o$. Нам нужно лишь доказать, что $\angle CAF + \angle CAE = 180^\circ$, то есть доказать равенство $\angle CAE = \angle CBF$. Однако это равенство очевидно следует из равенства треугольников CBD и CAE.



К решению задачи 10.4.

Способ 2. Треугольники AFD и BCD подобны (по 2 углам), откуда $CB/CD = FA/FD = AG/FD = AB/DE$. Из последних двух соотношений следует, что $AG/AB = DF/DE$, $\angle BAG = 120^\circ - \angle ABG = 120^\circ - (60^\circ - \angle ADB) = 120^\circ - (60^\circ - (\angle EDF - 60^\circ)) = \angle EDF$, т. е. треугольники BAG и EDF подобны (по 2 сторонам и углу), т. е. $\angle DFE = 60^\circ$. $\angle DFA$ тоже равен 60°, т. е. точки F, A, и E лежат на одной прямой.

Способ 3. Рассмотрим поворот с центром в точке C, переводящий точку B в точку A. Это поворот на 60° (против часовой стрелки, если следовать рисунку), который переводит точку D в точку E, а тогда отрезок BD в отрезок AE. Тогда угол между отрезками AE и BD также равен 60°. Пусть прямая EA пересекает прямую BD в точке F_1; по доказанному выше $\angle EF_1D = \angle AF_1D = 60^\circ$. Так как $\angle AFD = 60^\circ$, точки F и F_1 совпадают.

10.5. Алиса и Боб нашли клад, состоящий из чётного количества монет, причём все монеты были разной стоимости. Они решили поделить монеты следующим способом. Сначала Боб выкладывает все монеты в ряд в том порядке, какой ему больше по душе. Затем Алиса и Боб по очереди (Алиса первая) берут себе по монете из этого ряда, при этом каждый раз можно брать только одну из двух крайних монет, либо первую, либо последнюю. И Алиса, и Боб желают получить возможно большую сумму денег.

а) Пусть клад состоит из четырёх монет. Могут ли их стоимости быть такими, что Боб сможет получить денег не меньше, чем Алиса, вне зависимости от её действий? Ответ обоснуйте.

б) Докажите, что Алиса всегда может, вне зависимости от действий Боба, получить не меньше чем Боб.

в) Пусть клад состоит из шести монет стоимостью 1, 2, 11, 13, 101, 104. Как следует действовать Бобу, чтобы гарантировано получить денег не меньше, чем Алиса?

г) Пусть все монеты в кладе либо бронзовые, либо медные, монет каждого вида одинаковое число, суммарная стоимость бронзовых монет не больше суммарной стоимости медных. Докажите, что Боб может получить не меньше, чем суммарная стоимость бронзовых монет.

Решение:

а) Подойдёт любая четвёрка монет, у которой сумма стоимостей самой дешёвой и самой дорогой монеты равна сумме стоимостей двух остальных. В этом случае Боб ставит самую дорогую монету на второе место, самую дешёвую — на последнее, четвёртое. Если Алиса своим первым ходом возьмёт монету с первой позиции, Боб заберёт самую дорогую и обеспечит себе минимум такую же сумму, как и Алиса. Если же Алиса первым ходом возьмёт самую дешёвую монету, она точно не получит больше половины суммы независимо от дальнейших действий кладоискателей.

б) Раскрасим выложенные в ряд монеты в два цвета в шахматном порядке (т. е. монеты, стоящие на нечётных местах в чёрный цвет, остальные — в белый). Заметим, что в силу чётности общего числа монет первая и последняя монета разного цвета. Алиса, если пожелает, может взять себе все монеты любого из цветов: она берёт монету этого цвета, а далее каждый раз берёт монету с того же конца, что и Боб. Стратегия Алисы может быть такой: когда монеты будут выложены в ряд, подсчитать сумму стоимостей чёрных монет, сумму стоимостей белых монет, выбрать из этих двух сумм наибольшую и взять все монеты этого цвета. Если суммы стоимостей белых и чёрных монет равны, Алиса и Боб получат поровну, если нет — Алиса больше.

в) Например, Боб может выложить монеты в порядке 1, 2, 11, 13, 104, 101 и далее каждым ходом брать монету с того же конца, что и Алиса. Доказательство того, что такая стратегия приведёт к получении им не менее половины всей суммы, может быть получено переборным путём или найдено в решении следующего пункта.

г) Стратегия Боба: Боб произвольно распределяет монеты на пары так, что в каждой паре одна монета медная, вторая — бронзовая. Эти пары он делит на два типа: к первому типу относит все пары, в которых медная монета дешевле бронзовой, ко второму — в которых дороже. Монеты выкладываются в ряд в таком порядке: сначала все пары первого типа в любом порядке, но так, что первая монета в каждой паре медная, затем все пары второго типа тоже в любом порядке, но так, что первая монета в каждой паре бронзовая. Берёт Боб монеты каждый раз с того конца, что и Алиса.

Покажем, что при использовании этой стратегии Боб получит не меньше, чем суммарная стоимость бронзовых. Отметим флажком место в ряду, где кончаются пары первого типа и начинаются пары второго типа. Взятие монет кладоискателями разделим на два этапа: первый от первой взятой монеты до того момента, когда с одной стороны от флажка монет не окажется (этап может оказаться и пустым), второй — с момента окончания первого этапа до конца дележа. Возможно две ситуации: 1) после первого этапа не осталось монет слева от флажка. Тогда согласно стратегии, к началу второго этапа Боб получил все бронзовые монеты из пар первого типа и, возможно, какие-то медные из пар второго типа. Далее если Алиса будет брать монеты слева, то Боб продолжит собирать бронзовые монеты, поэтому если Алиса ни разу за всё время игры не брала монет справа, он соберёт все бронзовые и получит их стоимость. Если же Алиса при каких-то своих ходах брала монеты справа, то это равносильно тому, как если бы в предыдущей ситуации Алиса поменялась с Бобом монетами из нескольких пар второго типа. Поскольку в каждой из этих пар медная монета дороже бронзовой, сумма стоимостей монет Боба вырастет. 2) после первого этапа не осталось монет справа от флажка. Тогда рассуждая аналогично, получим, что Боб получит не меньше стоимости всех медных монет, что не меньше стоимости всех бронзовых. Доказательство завершено.

Ответ: а) могут. в) алгоритм Боба приведён в тексте решения.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

2016 — 2017 учебный год

11 класс

РЕШЕНИЯ

11.1. Натуральное число n называется *совершенным*, если сумма всех его натуральных делителей, кроме самого числа n, равна n. Найдите все совершенные числа, десятичная запись которых состоит только из цифр 0 и 6.

Решение:

Пусть число n совершенное, а его десятичная запись состоит только из нулей и шестёрок. Тогда n делится нацело на 6, потому что на 6 делится каждая из его цифр. Значит, у него точно есть три натуральных делителя $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ и $\frac{n}{6}$; они различны и каждый из них строго меньше n. Но сумма этих трёх делителей уже равна n, поэтому других натуральных делителей, меньших n, у числа n нет. Тогда наименьший из них — число $\frac{n}{6}$ — равен 1, а само число n равно 6. Число 6, как легко проверить, является совершенным.

Ответ: только число 6.

11.2. Найдите наибольшее значение выражения

$$\log_{xy} x \cdot \log_{xy} y \cdot \left(\log_{xy} \frac{x}{y}\right)^2.$$

Решение:

Положим $t = \log_{xy} x$, тогда $\log_{xy} y = \log_{xy} \frac{xy}{x} = 1 - t$, а $\log_{xy} \frac{x}{y} = \log_{xy} \frac{x^2}{xy} = 2\log_{xy} x - \log_{xy} xy = 2t - 1$. Так как при $x = x^a \cdot y^a$ (что достигается при $x = y^{\frac{a}{1-a}}$) значение $t = a$, то t может принимать любые действительные значения, и задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $f(t) = t(1-t)(2t-1)^2$.

Заметим, что

$$f(t) = t(1-t)(2t-1)^2 = -(t^2-t)(2t-1)^2 = -4((t-0,5)^2 - 0,25)(t-0,5)^2.$$

Положив $(t-0,5)^2 = p \geqslant 0$, получим, что $f(t) = -4(p-0,25)p$. График функции $-4(p-0,25)p$ — парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому наибольшее значение выражение достигается в вершине параболы (в точке $p = 1/8$) и это значение равно $1/16$.

Ответ: $1/16$.

11.3. Стержень длины 4 расположен целиком внутри куба с ребром 3. Найдите минимально возможное расстояние между серединой этого стержня и ближайшей к ней вершиной куба. Ответ обосновать.

Решение: Рассмотрим сечение куба плоскостью, проходящей через стержень и ближайшую к его середине вершину куба, вершину A. Сечение представляет собой многоугольник, одна из вершин которого есть вершина A. Легко доказывается, что угол многоугольника при этой вершине не более $90°$. Стержень полностью лежит во внутренней части угла. Мы можем считать, что концы стержня (обозначим их буквами B и C, а середину стержня буквой M) лежат на сторонах угла (если это не так, то можно подвинуть стержень параллельно одной из сторон угла по направлению к точке A; при этом расстояние MA уменьшится). Нам надо найти минимум длин медиан AM треугольников ABC, у которых $BC = 4$ и $\angle A \leqslant 90°$. Если $\angle A = 90°$, то AM равна половине гипотенузы треугольника ABC, т. е. равна 2. Покажем, что в случае острого угла A величина AM больше 2. Рассмотрим окружность с диаметром BC. Так как угол A — острый, точка A лежит вне этой окружности, и расстояние от неё до центра — точки M больше радиуса. Итак, $AM \geqslant 2$ любом случае, и равенство достигается, если угол A — прямой. Это достигается, например, в случае если конец стержня B лежит на диагонали грани куба, а конец стержня C — на ребре, перпендикулярном этой грани.

Примечание. Следует считать очевидным, что угол сечения при вершине A не может оказаться тупым.

Ответ: 2.

11.4. Есть три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л. Кроме того, есть кран с водой и раковина для слива воды. В самом маленьком сосуде налито 3 литра сиропа; остальные сосуды пусты. Можно ли с помощью переливаний получить ровно 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа (возможно, какой-то сосуд при этом окажется пустым)? Ответ обоснуйте.

Способ 1. Приведём нужную последовательность операций.

Шаг 1. Не трогая трёхлитровый сосуд добиваемся того, чтобы в четырёхлитрововм сосуде осталось ровно 2 л воды (пятилитровый при этом оставляем пустым). Это можно сделать, например, так: наполняем водой пятилитровый сосуд, затем наполняем из него четырёхлитровый и выливаем из четырёхлитрового всё в раковину, выливаем из пятилитрового оставшийся там 1 литр воды в четырёхлитровый, а пятилитровый наполняем из крана, снова дополняем четырёхлитровый из пятилитрового, а затем опорожняем четырёхлитровый. Теперь в пятилитровом сосуде ровно 2 л воды, переливаем её в опустевший четырёхлитровый сосуд.

Шаг 2. Дополняем 4-х литровый сосуд сиропом из трёхлитрового, а оставшийся сироп выливаем в пятилитровый сосуд. Теперь трёхлитровый сосуд пуст, четырёхлитровый полон 50% смесью воды с сиропом, а в пятилитровом ровно 1 литр сиропа.

Шаг 3. Наполняем трёхлитровый сосуд смесью из четырёхлитрового, и опорожняем его в пятилитровый, который после этого дополняем водой из-под крана. Теперь у нас есть 1 л смеси в четырёхлитровом сосуде и 5 л в пятилитровом; всего 6 л смеси. При этом в сосудах имеется 3 литра сиропа и $6 - 3 = 3$ литра воды. Смесь в четырёх литровом сосуде 50%-я, т. е. нём пол-литра воды и пол-литра сиропа. Тогда в пятилитровом воды и сиропа по полтора литра — поровну. Условие задачи выполнено.

Способ 2. Приведём нужную последовательность операций.

Шаг 1. Не трогая трёхлитровый сосуд добиваемся того, чтобы в четырёхлитрововм сосуде остался ровно 1 л воды (пятилитровый при этом оставляем пустым). Это можно сделать, например, так: наполняем водой пятилитровый сосуд, затем наполняем из него четырёхлитровый и выливаем из четырёхлитрового всё в раковину, наконец, оставшуюся в пятилитровом сосуде воду переливаем в опустевший четырёхлитровый.

Шаг 2. Выливаем весь сироп в 4-х литровый сосуд (теперь он полон 75% раствором сиропа).

Шаг 3. Манипулируя только трёх- и пятилитровым сосудами добьёмся, чтобы в трёхлитровом сосуде остался ровно 1 литр воды. Например, можно наполнить водой трёхлитровый сосуд, вылить всё из него в пятилитровый, снова набрать трёхлитровый и из него дополнить пятилитровый доверху. Пятилитровый сосуд делаем пустым.

Шаг 4. Дополняем трёхлитровый сосуд доверху из четырёхлитрового; в него попадёт ровно половина всего сиропа, т. е. полтора литра. Таким образом, в нём образуется 50% раствор сиропа.

Шаг 5. Выливаем содержимое трёхлитрового сосуда в пятилитровый и в опустевший трёхлитровый выливаем оставшиеся два литра из четырёхлитрового сосуда. Теперь в трёхлитровом сосуде 1,5 л сиропа и 0,5 л воды.

Шаг 6. Дополняем трёхлитровый сосуд водой из-под крана. Задача решена.

Ответ: Можно.

11.5. Ускоритель элементарных частиц представляет собой окружность длины 6 км. Известно, что во время эксперимента в некоторых точках данной окружности однократно возникнут и сразу исчезнут 6 элементарных частиц, равномерно расположенных по окружности, т. е. так, что расстояние между соседними будет равно 1 км (расстоянием между точками окружности мы называем длину кратчайшей дуги между ними). Перед началом эксперимента физики устанавливают электромагнитную ловушку, состоящую из нескольких датчиков, установленных в некоторых точках ускорителя. Важно, каким окажется минимальное расстояние среди всех попарных расстояний между датчиками ловушки и частицами, которые возникнут в эксперименте. Каким окажется это минимальное расстояние, никто не знает (так как предсказать, где именно возникнут частицы, нельзя). Зато можно заранее оценить максимум такого минимального расстояния (взятый по всем возможным расположениям частиц) — этот максимум называется *дисперсией* ловушки.

а) Найдите дисперсию ловушки, имеющей 1 датчик.

б) Найдите дисперсию ловушки, имеющей 30 датчиков, равномерно расположенных по окружности.

в) Докажите, что если к произвольной ловушке добавить один новый датчик, расположенный на расстоянии 1 км от одного из старых датчиков, то дисперсия ловушки не изменится.

г) Найдите дисперсию ловушки, имеющий 3 датчика, расположенных так, что попарные расстояния между ними равны $\sqrt{2}$ км, $\sqrt{3}$ км и $6 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ км.

Решение:

а) Точки возникновения частиц разбивают окружность на 6 дуг длины 1 км каждая. Датчик попадает на одну из этих дуг, поэтому расстояние от него до одной из точек возникновения частиц не больше, чем половина дуги. При этом возможна ситуация, когда датчик окажется ровно на середине дуги. Значит, дисперсия ловушки равна 0,5 км.

б) Датчики разбивают окружность на 30 дуг длины 0,2 км каждая. Любая возникшая частица попадает на одну из таких дуг, поэтому расстояние от неё до какого-то датчика не больше половины дуги, т. е. не больше, чем 0,1 км. При этом если частица возникнет точно в середине дуги (а тогда в силу того, что 30 делится на 6 нацело, остальные частицы тоже окажутся в серединах некоторых дуг), расстояние от неё до ближайшего датчика будет в точности равно 0,1 км.

в) Дисперсия не может увеличится, поскольку все старые датчики остались на своих местах. Покажем, что она не может уменьшиться. От противного, пусть дисперсия новой ловушки равна d, а дисперсия первоначальной $d_1 > d$. Тогда возможна ситуация, что частицы возникли в таких местах, что все расстояния от этих мест до первоначальных датчиков не меньше, чем d_1. С другой стороны, среди возникших частиц есть такая (обозначим её Q), расстояние от которой до некоторого датчика (назовём его датчик N) не больше d. Ясно, что это — добавленный датчик, он расположен по условию на расстоянии 1 км от одного из первоначальных датчиков; обозначим этот первоначальный датчик буквой S. Рассмотрим точку, отстоящую от точки возникновения частицы Q на 1 км в том же направлении, что и S по отношению к N. Расстояние от этой точки до датчика S такое же, как от Q до N, т. е. не больше d. Но в ней также возникла частица, поэтому это расстояние не может быть меньше d_1 — противоречие.

г) Для каждого имеющегося датчика построим ещё 5 на расстояниях 1, 2, 3, 4 и 5, если обходить окружность по часовой стрелке. (Здесь и далее все длины указаны в км.) Согласно пункту в) дисперсия ловушки при этом не изменится. Один из изначальных датчиков и те 5 новых, которые построили для этого датчика, разбили окружность на 6 равных дуг, при этом расположение других датчиков на каждой такой дуге одинаково. При любом возникновении частиц на каждую такую дугу попадёт ровно одна, причём расположение каждой возникшей частицы по отношению к датчикам на дуге одно и то же. Значит, дисперсия ловушки будет в точности равна половине длины наибольшей из дуг, на которую разбили окружность имеющиеся после построения 18 датчиков. Найдём эту длину. Зафиксируем один из первоначальных датчиков A и пусть датчик B построен от него на расстоянии 1 км по часовой стрелке. Без ограничения общности можно считать, что два других первоначальных датчика располагались так: один на расстоянии $\sqrt{2}$ от A по часовой стрелке, второй на расстоянии $\sqrt{3}$ от A против часовой стрелки. Тогда на дуге AB построены два датчика: один на расстоянии $\sqrt{2}-1$ от A, второй — на расстоянии $2-\sqrt{3}$ от A. Эти два датчика разбили дугу AB на дуги, длины которых $2-\sqrt{3}$, $(\sqrt{2}-1)-(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-3$ и $1-(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}$ соответственно. Длина наибольшей из возникших дуг, следовательно, равна $2-\sqrt{2}$, а дисперсия ловушки равна $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: а) 0,5 км. б) 0,1 км. г) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ км.