ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

5 класс

5.1. Анна и Мария родились в один день, хотя и в разные годы. Сейчас Анне 24 года. Это вдвое больше, чем было Марии тогда, когда Анне было столько лет, сколько Марии сейчас. Сколько сейчас лет Марии? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

5.2. В трёхзначном числе одну из цифр увеличили на 6, а само число из-за этого увеличилось в 6 раз. Чему равно исходное число? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (**7 баллов**)

5.3. Можно ли разрезать квадрат со стороной 5 на семь прямоугольников с целыми длинами сторон так, чтобы среди них не было одинаковых? (**7 баллов**)

5.4. Олимпиада по математике состояла из 5 задач; решение каждой задачи оценивалась целым неотрицательным числом баллов (максимум 7). Вася за решение 1-й и 2-й задач получил в сумме столько же баллов, сколько в сумме за решение 4-й и 5-й задачи и больше, чем в сумме за решение 2-й, 3-й и 4-й задач. Какое максимальное количество баллов мог набрать Вася? (**7 баллов**)

5.5. Пятиклассник Коля с ностальгией вспоминает об ушедшем 2015 году. Он выписал первые 5000 натуральных чисел на доске и разрешил своему другу Демьяну стирать любые два числа, записывая вместо них их разность. Сможет ли Демьян получить после 4999 операций число 2015? (**7 баллов**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

6 класс

6.1. Разница во времени между Москвой и Петропавловском-Камчатским составляет 9 часов, а разница между Москвой и Токио составляет 6 часов (оба города находятся восточнее Москвы). Когда самолёт вылетел из Токио, на часах в токийском аэропорту было 17 : 20, а когда прилетел в Петропавловск-Камчатский, то там уже было 22 : 10 по камчатскому времени. Когда самолёт вылетел обратно, в Петропавловске-Камчатском было 8 : 30. Считая, что на обратный путь самолёт тратит столько же времени, определите, сколько времени будет в Токио при посадке. Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

6.2. Аня перемножила 4 последовательных натуральных числа, а Вика — следующие за ними 3 последовательных натуральных числа. Могли ли у девочек получиться одинаковые произведения? (**7 баллов**)

6.3. Марья Ивановна попросила Петю вырезать из листа клетчатой бумаги такую фигурку, как указано на рис. 1. (Так как бумажку можно переворачивать, симметричная фигурка её тоже устроит). У Пети нашёлся всего один обрывок листа клетчатой бумаги (см. рис. 2), и даже на этом обрывке оказалось 11 дырок от ножки циркуля. Докажите, что при любом положении дырок Петя сможет выполнить задание Марьи Ивановны так, что внутри вырезанной им фигурки дырок не будет. (Размерами дырок пренебречь.) (**7 баллов**)

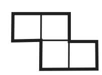


Рис. 1

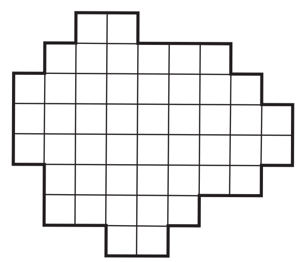


Рис. 2

К условию задачи 6.3

6.4. Определите, сколько различных решений имеет ребус

$$\textbf{П} > \textbf{О} > \textbf{С} > \textbf{Ч} > \textbf{И} > \textbf{Т} > \textbf{А} > \textbf{Й}.$$

(Каждая буква — это цифра.) Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

6.5. Вася расставил на шахматной доске размером 8×8 клеток 21 шахматного коня. Могло ли случиться так, что каждый конь находится под боем

а) ровно двух из остальных коней; (**3 балла**)

б) одного и того же ненулевого количества остальных коней? (**4 балла**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

7 класс

7.1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a + bc = (a + b)(a + c).$$

Докажите, что эти числа также удовлетворяют соотношению

$$b + ca = (b + c)(b + a).$$

(**7 баллов**)

7.2. По кругу записаны N натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Верно ли, что обязательно найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством, если:

а) $N = 7$; (**3 балла**)

б) $N = 8$? (**4 балла**)

7.3. На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $DEFG$ с общей вершиной D, причем известно, что E — середина отрезка BC. Найдите величину угла $\angle DCF$. Ответ обоснуйте. При обозначении вершины квадратов указаны по часовой стрелке. (**7 баллов**)

7.4. Определите, сколько различных решений имеет ребус

$$\mathbf{У} > \mathbf{Н} > \mathbf{И} > \mathbf{В} > \mathbf{Е} < \mathbf{Р} < \mathbf{С} < \mathbf{А} < \mathbf{Л}.$$

(Различные буквы обозначают различные цифры.) Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

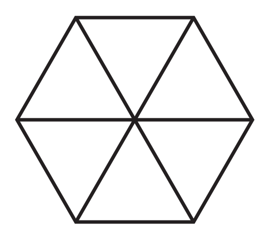
7.5. Правильный шестиугольник легко разрезать на 6 равных частей — см. рисунок. Покажите, как разрезать правильный шестиугольник на N равных частей (напомним, что симметричные фигуры также являются равными). Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 18$; (**2 балла**)

б) $N = 50$; (**4 балла**)

в) $N = 16$; (**4 балла**)

г) $N = 2016$. (**4 балла**)



К условию задачи 7.5

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

8 класс

8.1. Существует ли такое состоящее из различных цифр трёхзначное число N, из которого последовательным вычёркиванием цифр можно получить двузначное число M и однозначное число K такие, что все три числа M, N, K делятся на 7? (**7 баллов**)

8.2. В фирме работают семеро охранников. Каждый день трое из них должны нести службу, а четверо — отдыхать. Помогите директору фирмы составить такое расписание на 7 рабочих дней так, чтобы любые два охранника вместе работали ровно один день. (**7 баллов**)

8.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120°$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$. (**7 баллов**)

8.4. Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1 и произведения двух других чисел. Какому числу может равняться сумма всех трёх попарных произведений этих чисел? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет. (**7 баллов**)

8.5. 2016 городов страны соединены постоянными авиарейсами так, что из каждого города можно долететь в каждый (возможно, с пересадками). Расстояние между двумя городами — это минимальное количество авиаперелётов, которое нужно совершить, чтобы попасть из одного города в другой. Правительство страны пожелало улучшить систему авиалиний. Для этого были выбраны два города, расстояние между которыми максимально, и введён соединяющий их дополнительный авиарейс (заметим, что после этого могли уменьшиться расстояния и между какими-то другими городами). Затем снова были выбраны два города, расстояние (т. е. новое расстояние) между которыми максимально, введён соединяющий их авиарейс и т. д. Всего было введено N новых авиарейсов. Могло ли так случиться, что после этого расстояние между какими-то двумя городами осталось больше, чем S? Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 1$, $S = 1100$; (**2 балла**)

б) $N = 2$, $S = 2000$; (**4 балла**)

в) $N = 3$, $S = 805$; (**4 балла**)

г) $N = 1$, $S = 1700$. (**4 балла**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

9 класс

9.1. На координатной плоскости изображена гипербола — график функции $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$). Прямая l пересекает гиперболу в точках с абсциссами k_1 и k_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой k_3. Докажите, что $k_1 + k_2 = k_3$. (**7 баллов**)

9.2. В некоторой компании каждый человек является либо рыцарем (т. е. всегда говорит правду), либо лжецом (т. е. всегда лжёт). Каждый из них сказал по фразе:

1-й: Среди нас ровно 1 рыцарь.

2-й: Среди нас ровно 2 лжеца.

3-й: Среди нас ровно 3 рыцаря.

...

$2k$-й: Среди нас ровно $2k$ лжецов

$2k+1$-й: Среди нас ровно $2k+1$ рыцарей

...

Сколько могло быть людей в компании, если известно, что среди них есть по крайней мере один рыцарь? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.(**7 баллов**)

9.3. Найдите все пары натуральных чисел $(m; n)$ таких, что любое m-значное число-палиндром (т. е. число, десятичная запись которого читается одинаково справа налево и слева направо) делилось бы на n без остатка. (**7 баллов**)

9.4. Из вершин A и C четырёхугольника $ABCD$ опустили перпендикуляры AM и CN на диагональ BD, которые разбили её на три равные части, причём $AM = a$, $CN = b$. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Найдите её радиус. (**7 баллов**)

9.5. Дед Мороз принёс на ёлку мешок с подарками. Известно, что количество подарков в мешке не меньше, чем количество детей, пришедших на ёлку. Каждому ребёнку какие-то подарки понравились, а какие-то — не понравились. Всегда ли Дед Мороз сможет подарить каждому ребёнку по одному подарку так, чтобы каждый ребёнок получил подарок, который ему нравится? Решите эту задачу в следующих случаях:

1) Каждому ребёнку нравится ровно 2 подарка, и каждый подарок нравится не более, чем 2-м детям; (**2 балла**)

2) Каждому ребёнку нравится не менее 3-х подарков, и каждый подарок нравится не менее, чем 3-м детям. (**3 балла**)

3) Каждому ребёнку хотя бы один подарок нравится, и всем детям нравится разное количество подарков; (**3 балла**)

4) Каждому ребёнку нравится ровно 3 подарка, и каждый подарок нравится ровно 2-м детям. (**6 баллов**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

10 класс

10.1. Вовочка узнал, что оказывается, при $|q| < 1$ можно посчитать бесконечную сумму $b+bq+bq^2+\ldots$, и эта сумма будет равна $\dfrac{b}{1-q}$. Также ему сообщили, что можно посчитать и более сложную сумму: $1+2q+3q^2+4q^3+\ldots$ (по-прежнему $|q| < 1$), но чему она равна, так и не сказали. Помогите Вовочке найти эту сумму. (**7 баллов**)

10.2. Существует ли такой многочлен $Q(x)$, что для всех простых чисел p имеет место равенство $Q(p) = \sqrt{p}$? (**7 баллов**)

10.3. Петя загадал трёхзначное число $\overline{abc}$ (возможно, в его десятичной записи встречаются нули). После этого он сказал Васе сумму пяти, уже не обязательно трёхзначных, не обязательно разных, чисел $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Всегда ли Вася по этой информации может однозначно восстановить число Пети? Ответ обосновать. (**7 баллов**)

10.4. Дан правильный семиугольник $ABCDEFG$. Точка O — точка пересечения диагоналей в трапеции $ABCD$. Докажите, что $AB + AO = AD$. (**7 баллов**)

10.5. По периметру круглой сковороды выложено 8 котлет, на равном расстоянии одна от другой. Известно, что вес самой лёгкой котлеты свыше 100 г, котлета, соседняя с самой лёгкой (по часовой стрелке) ровно на 5 г тяжелее, следующая по часовой стрелке — ещё на 5 г тяжелее и т. д. (в частности, котлета, соседняя с самой лёгкой против часовой стрелки, тяжелее её на 35 г). Также имеются чашечные весы (без гирь), на обе чашки которых можно класть любое количество котлет из имеющихся. Эксперт желает с их помощью найти самую тяжёлую котлету.

1) Предположим, что эксперт первым взвешиванием сравнил веса двух лежащих рядом котлет и после этого без других взвешиваний смог однозначно найти самую тяжёлую. Какие котлеты попали на весы? (**1 балл.**)

2) Сорока принесла на хвосте весть, что самая тяжёлая котлета — одна из трёх подряд лежащих (и указала эксперту эти три котлеты). Покажите, как теперь эксперт может решить задачу всего за 1 взвешивание. (**2 балла**)

3) Покажите, что если бы Сорока указала эксперту на 4 произвольные котлеты, среди которых есть самая тяжёлая, то эксперт не смог бы гарантированно решить задачу за одно взвешивание (независимо от того, на какие 4 котлеты указала бы сорока). (**3 балла**)

4) Докажите, что если эксперт первым взвешиванием сравнит веса двух любых котлет, то может случиться, что двух взвешиваний ему не хватит, чтобы гарантированно решить задачу. (**4 балла**)

5) Как эксперту гарантированно найти самую тяжёлую котлету за два взвешивания? (**4 балла**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

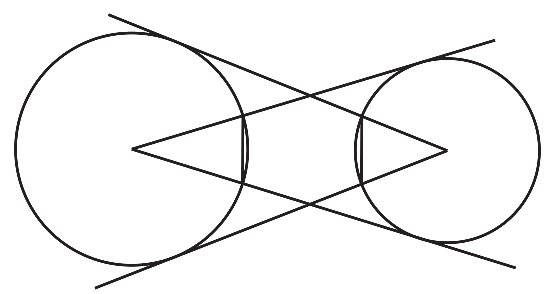
2015 — 2016 учебный год

11 класс

11.1. На координатной плоскости изображена гипербола — график функции $y = \dfrac{a}{x}$ ($a \neq 0$). Прямая l пересекает гиперболу в точках с абсциссами k_1 и k_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой k_3. Докажите, что $k_1 + k_2 = k_3$. (**7 баллов**)

11.2. Существует ли такой многочлен $Q(x)$, что для всех простых чисел p имеет место равенство $Q(p) = \sqrt{p}$? (**7 баллов**)

11.3. Докажите *теорему о глазных яблоках*: Пусть на плоскости заданы две окружности, расстояние между центрами которых больше суммы их радиусов. Из центра каждой окружности выходят два луча, высекающие из неё дугу, и касающиеся второй окружности (см рисунок). Докажите, что хорды, стягивающие эти высекаемые дуги, равны. (**7 баллов**)



К условию задачи 11.3

11.4. В однокруговом шахматном турнире (каждый шахматист играл с каждым по одной партии) участвовало N шахматистов ($N > 2$). По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько партий, сколько ничьих было зафиксировано в партиях, в которых этот участник не играл. Какие значения может принимать N? Ответ обосновать. (**7 баллов**)

11.5. Буратино хочет окрасить каждую диагональ и каждую сторону правильного N-угольника ($N > 3$) в некоторый цвет так, чтобы отрезков каждого использованного цвета было ровно три, и они составляли треугольник. (Различных красок для этого у него достаточно.) Сможет ли он это сделать, если

а) $N = 7$; (**2 балла**)

б) $N = 16$; (**3 балла**)

в) $N = 17$; (**3 балла**)

г) $N = 21$? (**6 баллов**)

Ответ обосновать.