ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

5 класс

5.1. Анна и Мария родились в один день, хотя и в разные годы. Сейчас Анне 24 года. Это вдвое больше, чем было Марии тогда, когда Анне было столько лет, сколько Марии сейчас. Сколько сейчас лет Марии? Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

5.2. В трёхзначном числе одну из цифр увеличили на 6, а само число из-за этого увеличилось в 6 раз. Чему равно исходное число? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (**7 баллов**)

5.3. Можно ли разрезать квадрат со стороной 5 на семь прямоугольников с целыми длинами сторон так, чтобы среди них не было одинаковых? (**7 баллов**)

5.4. Олимпиада по математике состояла из 5 задач; решение каждой задачи оценивалась целым неотрицательным числом баллов (максимум 7). Вася за решение 1-й и 2-й задач получил в сумме столько же баллов, сколько в сумме за решение 4-й и 5-й задачи и больше, чем в сумме за решение 2-й, 3-й и 4-й задач. Какое максимальное количество баллов мог набрать Вася? (**7 баллов**)

5.5. Пятиклассник Коля с ностальгией вспоминает об ушедшем 2015 году. Он выписал первые 5000 натуральных чисел на доске и разрешил своему другу Демьяну стирать любые два числа, записывая вместо них их разность. Сможет ли Демьян получить после 4999 операций число 2015? (**7 баллов**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

6 класс

6.1. Разница во времени между Москвой и Петропавловском-Камчатским составляет 9 часов, а разница между Москвой и Токио составляет 6 часов (оба города находятся восточнее Москвы). Когда самолёт вылетел из Токио, на часах в токийском аэропорту было 17 : 20, а когда прилетел в Петропавловск-Камчатский, то там уже было 22 : 10 по камчатскому времени. Когда самолёт вылетел обратно, в Петропавловске-Камчатском было 8 : 30. Считая, что на обратный путь самолёт тратит столько же времени, определите, сколько времени будет в Токио при посадке. Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

6.2. Аня перемножила 4 последовательных натуральных числа, а Вика — следующие за ними 3 последовательных натуральных числа. Могли ли у девочек получиться одинаковые произведения? (**7 баллов**)

6.3. Марья Ивановна попросила Петю вырезать из листа клетчатой бумаги такую фигурку, как указано на рис. 1. (Так как бумажку можно переворачивать, симметричная фигурка её тоже устроит). У Пети нашёлся всего один обрывок листа клетчатой бумаги (см. рис. 2), и даже на этом обрывке оказалось 11 дырок от ножки циркуля. Докажите, что при любом положении дырок Петя сможет выполнить задание Марьи Ивановны так, что внутри вырезанной им фигурки дырок не будет. (Размерами дырок пренебречь.) (**7 баллов**)

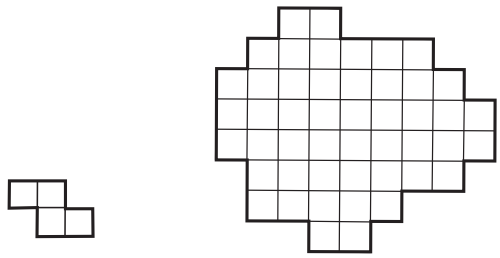


Рис. 1 Рис. 2

К условию задачи 6.3

6.4. Определите, сколько различных решений имеет ребус

$$\mathbf{П} > \mathbf{О} > \mathbf{С} > \mathbf{Ч} > \mathbf{И} > \mathbf{Т} > \mathbf{А} > \mathbf{Й}.$$

(Каждая буква — это цифра.) Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

6.5. Вася расставил на шахматной доске размером 8×8 клеток 21 шахматного коня. Могло ли случиться так, что каждый конь находится под боем

а) ровно двух из остальных коней; (**3 балла**)

б) одного и того же ненулевого количества остальных коней? (**4 балла**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

7 класс

7.1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a + bc = (a + b)(a + c).$$

Докажите, что эти числа также удовлетворяют соотношению

$$b + ca = (b + c)(b + a).$$

(**7 баллов**)

7.2. По кругу записаны N натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Верно ли, что обязательно найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством, если:

а) $N = 7$; (**3 балла**)

б) $N = 8$? (**4 балла**)

7.3. На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $DEFG$ с общей вершиной D, причем известно, что E — середина отрезка BC. Найдите величину угла $\angle DCF$. Ответ обоснуйте. При обозначении вершины квадратов указаны по часовой стрелке. (**7 баллов**)

7.4. Определите, сколько различных решений имеет ребус

$$\textbf{У} > \textbf{Н} > \textbf{И} > \textbf{В} > \textbf{Е} < \textbf{Р} < \textbf{С} < \textbf{А} < \textbf{Л}.$$

(Различные буквы обозначают различные цифры.) Ответ обоснуйте. (**7 баллов**)

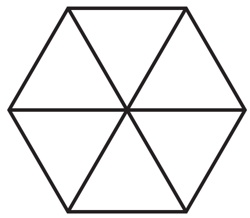
7.5. Правильный шестиугольник легко разрезать на 6 равных частей — см. рисунок. Покажите, как разрезать правильный шестиугольник на N равных частей (напомним, что симметричные фигуры также являются равными). Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 18$; (**2 балла**)

б) $N = 50$; (**4 балла**)

в) $N = 16$; (**4 балла**)

г) $N = 2016$. (**4 балла**)



К условию задачи 7.5

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

8 класс

8.1. Существует ли такое состоящее из различных цифр трёхзначное число N, из которого последовательным вычёркиванием цифр можно получить двузначное число M и однозначное число K такие, что все три числа M, N, K делятся на 7? (**7 баллов**)

8.2. В фирме работают семеро охранников. Каждый день трое из них должны нести службу, а четверо — отдыхать. Помогите директору фирмы составить такое расписание на 7 рабочих дней так, чтобы любые два охранника вместе работали ровно один день. (**7 баллов**)

8.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120^\circ$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$. (**7 баллов**)

8.4. Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1 и произведения двух других чисел. Какому числу может равняться сумма всех трёх попарных произведений этих чисел? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет. (**7 баллов**)

8.5. 2016 городов страны соединены постоянными авиарейсами так, что из каждого города можно долететь в каждый (возможно, с пересадками). Расстояние между двумя городами — это минимальное количество авиаперелётов, которое нужно совершить, чтобы попасть из одного города в другой. Правительство страны пожелало улучшить систему авиалиний. Для этого были выбраны два города, расстояние между которыми максимально, и введён соединяющий их дополнительный авиарейс (заметим, что после этого могли уменьшиться расстояния и между какими-то другими городами). Затем снова были выбраны два города, расстояние (т. е. новое расстояние) между которыми максимально, введён соединяющий их авиарейс и т. д. Всего было введено N новых авиарейсов. Могло ли так случиться, что после этого расстояние между какими-то двумя городами осталось больше, чем S? Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 1$, $S = 1100$; (**2 балла**)
б) $N = 2$, $S = 2000$; (**4 балла**)
в) $N = 3$, $S = 805$; (**4 балла**)
г) $N = 1$, $S = 1700$. (**4 балла**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

9 класс

9.1. На координатной плоскости изображена гипербола — график функции $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \neq 0)$. Прямая l пересекает гиперболу в точках с абсциссами k_1 и k_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой k_3. Докажите, что $k_1 + k_2 = k_3$. (**7 баллов**)

9.2. В некоторой компании каждый человек является либо рыцарем (т. е. всегда говорит правду), либо лжецом (т. е. всегда лжёт). Каждый из них сказал по фразе:

1-й: Среди нас ровно 1 рыцарь.

2-й: Среди нас ровно 2 лжеца.

3-й: Среди нас ровно 3 рыцаря.

...

$2k$-й: Среди нас ровно $2k$ лжецов

$2k+1$-й: Среди нас ровно $2k+1$ рыцарей

...

Сколько могло быть людей в компании, если известно, что среди них есть по крайней мере один рыцарь? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.(**7 баллов**)

9.3. Найдите все пары натуральных чисел $(m; n)$ таких, что любое m-значное число-палиндром (т. е. число, десятичная запись которого читается одинаково справа налево и слева направо) делилось бы на n без остатка. (**7 баллов**)

9.4. Из вершин A и C четырёхугольника $ABCD$ опустили перпендикуляры AM и CN на диагональ BD, которые разбили её на три равные части, причём $AM = a$, $CN = b$. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Найдите её радиус. (**7 баллов**)

9.5. Дед Мороз принёс на ёлку мешок с подарками. Известно, что количество подарков в мешке не меньше, чем количество детей, пришедших на ёлку. Каждому ребёнку какие-то подарки понравились, а какие-то — не понравились. Всегда ли Дед Мороз сможет подарить каждому ребёнку по одному подарку так, чтобы каждый ребёнок получил подарок, который ему нравится? Решите эту задачу в следующих случаях:

1) Каждому ребёнку нравится ровно 2 подарка, и каждый подарок нравится не более, чем 2-м детям; (**2 балла**)

2) Каждому ребёнку нравится не менее 3-х подарков, и каждый подарок нравится не менее, чем 3-м детям. (**3 балла**)

3) Каждому ребёнку хотя бы один подарок нравится, и всем детям нравится разное количество подарков; (**3 балла**)

4) Каждому ребёнку нравится ровно 3 подарка, и каждый подарок нравится ровно 2-м детям. (**6 баллов**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2015 — 2016 учебный год

10 класс

10.1. Вовочка узнал, что оказывается, при $|q| < 1$ можно посчитать бесконечную сумму $b+bq+bq^2+\ldots$, и эта сумма будет равна $\dfrac{b}{1-q}$. Также ему сообщили, что можно посчитать и более сложную сумму: $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots$ (по-прежнему $|q| < 1$), но чему она равна, так и не сказали. Помогите Вовочке найти эту сумму. (**7 баллов**)

10.2. Существует ли такой многочлен $Q(x)$, что для всех простых чисел p имеет место равенство $Q(p) = \sqrt{p}$? (**7 баллов**)

10.3. Петя загадал трёхзначное число $\overline{abc}$ (возможно, в его десятичной записи встречаются нули). После этого он сказал Васе сумму пяти, уже не обязательно трёхзначных, не обязательно разных, чисел $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Всегда ли Вася по этой информации может однозначно восстановить число Пети? Ответ обосновать. (**7 баллов**)

10.4. Дан правильный семиугольник $ABCDEFG$. Точка O — точка пересечения диагоналей в трапеции $ABCD$. Докажите, что $AB + AO = AD$. (**7 баллов**)

10.5. По периметру круглой сковороды выложено 8 котлет, на равном расстоянии одна от другой. Известно, что вес самой лёгкой котлеты свыше 100 г, котлета, соседняя с самой лёгкой (по часовой стрелке) ровно на 5 г тяжелее, следующая по часовой стрелке — ещё на 5 г тяжелее и т. д. (в частности, котлета, соседняя с самой лёгкой против часовой стрелки, тяжелее её на 35 г). Также имеются чашечные весы (без гирь), на обе чашки которых можно класть любое количество котлет из имеющихся. Эксперт желает с их помощью найти самую тяжёлую котлету.

1) Предположим, что эксперт первым взвешиванием сравнил веса двух лежащих рядом котлет и после этого без других взвешиваний смог однозначно найти самую тяжёлую. Какие котлеты попали на весы? (**1 балл.**)

2) Сорока принесла на хвосте весть, что самая тяжёлая котлета — одна из трёх подряд лежащих (и указала эксперту эти три котлеты). Покажите, как теперь эксперт может решить задачу всего за 1 взвешивание. (**2 балла**)

3) Покажите, что если бы Сорока указала эксперту на 4 произвольные котлеты, среди которых есть самая тяжёлая, то эксперт не смог бы гарантированно решить задачу за одно взвешивание (независимо от того, на какие 4 котлеты указала бы сорока). (**3 балла**)

4) Докажите, что если эксперт первым взвешиванием сравнит веса двух любых котлет, то может случиться, что двух взвешиваний ему не хватит, чтобы гарантированно решить задачу. (**4 балла**)

5) Как эксперту гарантированно найти самую тяжёлую котлету за два взвешивания? (**4 балла**)

ПЯТНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

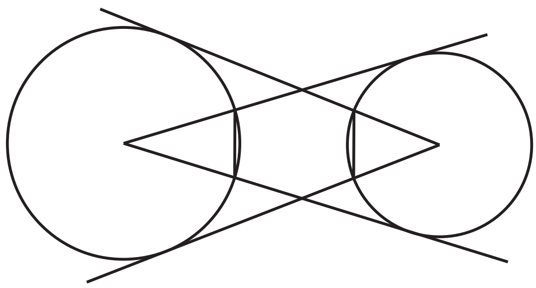
2015 — 2016 учебный год

11 класс

11.1. На координатной плоскости изображена гипербола — график функции $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \neq 0)$. Прямая l пересекает гиперболу в точках с абсциссами k_1 и k_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой k_3. Докажите, что $k_1 + k_2 = k_3$. (**7 баллов**)

11.2. Существует ли такой многочлен $Q(x)$, что для всех простых чисел p имеет место равенство $Q(p) = \sqrt{p}$? (**7 баллов**)

11.3. Докажите *теорему о глазных яблоках*: Пусть на плоскости заданы две окружности, расстояние между центрами которых больше суммы их радиусов. Из центра каждой окружности выходят два луча, высекающие из неё дугу, и касающиеся второй окружности (см рисунок). Докажите, что хорды, стягивающие эти высекаемые дуги, равны. (**7 баллов**)



К условию задачи 11.3

11.4. В однокруговом шахматном турнире (каждый шахматист играл с каждым по одной партии) участвовало N шахматистов $(N > 2)$. По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько партий, сколько ничьих было зафиксировано в партиях, в которых этот участник не играл. Какие значения может принимать N? Ответ обосновать. (**7 баллов**)

11.5. Буратино хочет окрасить каждую диагональ и каждую сторону правильного N-угольника $(N > 3)$ в некоторый цвет так, чтобы отрезков каждого использованного цвета было ровно три, и они составляли треугольник. (Различных красок для этого у него достаточно.) Сможет ли он это сделать, если

а) $N = 7$; (**2 балла**)

б) $N = 16$; (**3 балла**)

в) $N = 17$; (**3 балла**)

г) $N = 21$? (**6 баллов**)

Ответ обосновать.

РЕШЕНИЯ
5 класс

5.1. *Анна и Мария родились в один день, хотя и в разные годы. Сейчас Анне 24 года. Это вдвое больше, чем было Марии тогда, когда Анне было столько лет, сколько Марии сейчас. Сколько сейчас лет Марии? Ответ обоснуйте.*

Решение. Запишем условие задачи в таблицу

	сейчас	тогда
Аня	24	x
Мария	x	24:2=12

Уравнение возникает из-за того, что разность лет между тогда и сейчас одна и та же у обеих женщин. Таким образом, $24 - x = x - 12$, откуда $x = 18$.

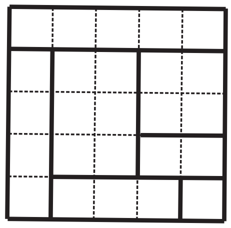
Ответ: 18 лет.

5.2. *В трёхзначном числе одну из цифр увеличили на 6, а само число из-за этого увеличилось в 6 раз. Чему равно исходное число? Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Пусть исходное число равно x, тогда получившееся равно $6x$. Разность этих чисел равна $5x$, и так как x — число трёхзначное, эта разность не меньше 500. Значит, увеличивалась цифра сотен, а само число увеличилось на 600. Из уравнения $5x = 600$ получаем $x = 120$.

Ответ: 120.

5.3. *Можно ли разрезать квадрат со стороной 5 на семь прямоугольников с целыми длинами сторон так, чтобы среди них не было одинаковых?*



к решению задачи 5.3

Решение. См. рисунок.

Ответ: Можно.

5.4. *Олимпиада по математике состояла из 5 задач; решение каждой задачи оценивалась целым неотрицательным числом баллов (максимум 7). Вася за решение 1-й и 2-й задач получил в сумме столько же баллов, сколько в сумме за решение 4-й и 5-й задачи и больше, чем в сумме за решение 2-й, 3-й и 4-й задач. Какое максимальное количество баллов мог набрать Вася?*

Решение. Так как за решение 1-й и 2-й задачи Вася получил больше, чем в сумме за решение 2-й, 3-й и 4-й задач, то за 3-ю и 4-ю задачу в совокупности он получил меньше баллов, чем за одну 1-ю, т. е. за них получено не более 6 баллов. В частности, за 4-ю задачу получено не более 6 баллов. Тогда за 4-ю и 5-ю задачу в сумме набрано не больше 13 баллов; за 1-ю и 2-ю — столько же. Тогда за решение 2-й, 3-й и 4-й задач Вася получил меньше 13 баллов, значит, 12 максимум. Ещё не более 14 баллов было набрано за 1-ю и 5-ю задачу вместе; всего получается не более 26 баллов.

Пример, показывающий, что 26 баллов Вася мог набрать: за задачи с 1-й по 5-ю Вася получил соответственно 7, 6, 0, 6 и 7 балов; сумма $7 + 6 + 0 + 6 + 7 = 26$.

Ответ: 26 баллов.

5.5. *Пятиклассник Коля с ностальгией вспоминает об ушедшем* 2015 *году. Он выписал первые* 5000 *натуральных чисел на доске и разрешил своему другу Демьяну стирать любые два числа, записывая вместо них их разность. Сможет ли Демьян получить после* 4999 *операций число* 2015*?*

Решение. Первый способ. Демьян меняет два числа a и b с суммой $a+b$ на число $a-b$, поэтому сумма чисел уменьшается на $2b$, т.е. на чётное число. Изначальная сумма чисел $1+2+..+5000$ чётна, так как в ней 2500 нечётных чисел. Поэтому оставшееся число будет чётным.

Второй способ. Если Демьян вычитает числа разной чётности, то получается нечётное число; в этом случае количество нечётных чисел на доске не меняется. Если вычитает два чётных — получится число чётное и количество нечётных чисел тоже остаётся неизменным. Наконец, при вычитании двух нечётных чисел получается число чётное, следовательно, общее количество нечётных чисел уменьшается на 2. Таким образом, чётность общего количества нечётных чисел всё время остаётся одной и той же; это — инвариант процесса. Изначально нечётных чисел $5000 : 2 = 2500$ — число чётное. Значит, и после 4999 операций их будет чётное число, т. е. оставшееся единственное число обязано быть чётным.

Примечание. Ещё одним инвариантом задачи является изменение ровно на 1 количества чётных чисел. После нечётного числа действий количество чётных чисел меняет свою чётность, т. е. становится нечётным.

Ответ: Не сможет.

РЕШЕНИЯ
6 класс

6.1. *Разница во времени между Москвой и Петропавловском-Камчатским составляет 9 часов, а разница между Москвой и Токио составляет 6 часов (оба города находятся восточнее Москвы). Когда самолёт вылетел из Токио, на часах в токийском аэропорту было 17 : 20, а когда прилетел в Петропавловск-Камчатский, то там уже было 22 : 10 по камчатскому времени. Когда самолёт вылетел обратно, в Петропавловске-Камчатском было 8 : 30. Считая, что на обратный путь самолёт тратит столько же времени, определите, сколько времени будет в Токио при посадке. Ответ обоснуйте.*

Решение. Давайте рассмотрим часы, которые идут точно по Московскому времени. Во время старта самолёта из Токио они показывали $17:20-6:00=11:20$. Во время прибытия самолёта в Петропавловск-Камчатский — $22:10-9:00=13:10$. Значит, перелёт длится $13:10-11:20=1:50$. Столько же времени займёт обратный путь. При вылете из Петропаловска-Камчатского часы показывали $8:30-9:00=23:30$, значит, по прибытии в Токио они будут показывать $23:30+1:50=1:20$. В Токио в это время будет $1:20+6:00=7:20$

Примечание. Можно было вести расчёт по любому другому времени, например, непосредственно по токийскому.

Ответ: 7 часов 20 минут утра.

6.2. *Аня перемножила 4 последовательных натуральных числа, а Вика — следующие за ними 3 последовательных натуральных числа. Могли ли у девочек получиться одинаковые произведения?*

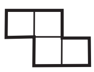


Рис. 1

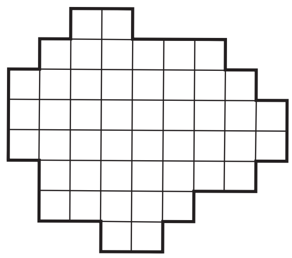


Рис. 2

К условию задачи 6.2

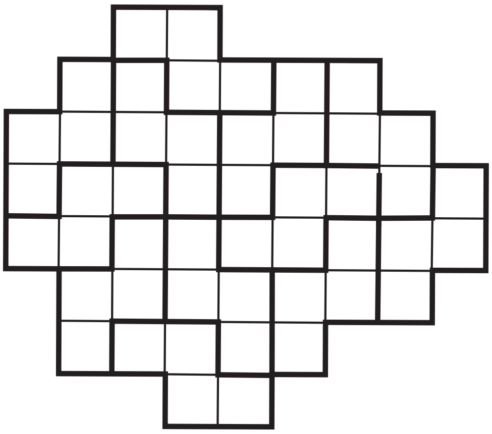
Решение. Способ первый. Из семи последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 7. Поэтому ровно у одной девочки произведение будет делиться на 7.

Способ второй. Заметим, что уже $4\cdot5\cdot6\cdot7=840>720=8\cdot9\cdot10$. При увеличении наименьшего числа Ани произведение её чисел возрастает быстрее, чем произведение чисел Вики, поэтому если равенство достижимо, то наименьшее выбранное Аней число меньше 4. Таких случаев всего три и непосредственным счётом проверяется, что ни один из них равенство произведений не даёт.

Ответ: Нет.

6.3. *Марья Ивановна попросила Петю вырезать из листа клетчатой бумаги такую фигурку, как указано на рис. 1. (Так как бумажку можно переворачивать, симметричная фигурка её тоже устроит). У Пети нашёлся всего один обрывок листа клетчатой бумаги (см. рис. 2), и даже на этом обрывке оказалось 11 дырок от ножки циркуля. Докажите, что при любом положении дырок Петя сможет выполнить задание Марьи Ивановны так, что внутри вырезанной им фигурки дырок не будет. (Размерами дырок пренебречь.)*

Решение. Пете достаточно разрезать листок на 12 фигурок так, как показано на рисунке.



К решению задачи 6.3

Так как дырки настолько малы, что их размерами пренебрегается, каждая дырка попадает целиком только в одну фигурку (или вообще никуда, если дырка на линии сетки). По принципу Дирихле из 12 фигурок найдётся по крайней мере одна, в которой не будет ни одной из 11 дырок. Эта фигурка и нужна Пете.

6.4. *Определите, сколько различных решений имеет ребус*

$$\mathbf{П} > \mathbf{О} > \mathbf{С} > \mathbf{Ч} > \mathbf{И} > \mathbf{Т} > \mathbf{А} > \mathbf{Й}.$$

(Каждая буква — это цифра.) Ответ обоснуйте.

Решение. В ребусе фигурируют 8 различных цифр. Заметим, что для любых 8 цифр, входящих в ребус, их расположение однозначно: наибольшая из цифр — это буква **П**, следующая по величине — буква **О** и т. д. Таким образом, ребус имеет столько решений, сколькими способами можно выбрать 8 цифр из 10 имеющихся. Это то же самое, что выбрать две цифры, которые в ребус не входят. Первая такая цифра может быть любой — 10 вариантов. Для каждого из них вторая цифра — любая из девяти оставшихся — $10 \cdot 9 = 90$ вариантов. При этом каждый вариант учтён дважды, поэтому разных вариантов вдвое меньше $90 : 2 = 45$.

Примечание. Те, кто знаком с элементами комбинаторики, подсчёт числа вариантов могут осуществить по формуле $C_{10}^{8} = C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!}$.

Ответ: 45 решений.

6.5. *Вася расставил на шахматной доске (размером 8×8 клеток) 21 шахматного коня. Могло ли случиться так, что каждый конь находится под боем*

а) ровно двух из остальных коней;

б) одного и то же ненулевого количества остальных коней?

Решение. Достаточно обосновать отрицательный ответ в пункте б). Предположим противное. Так как шахматный конь любым своим ходом меняет цвет поля, на котором стоит, то кони стоящие на чёрных полях бьют только коней стоящих на белых полях и наоборот. Соединим отрезками центры клеток, на которых стоят пары коней, бьющих друг друга. Тогда у каждого отрезка один конец стоит на белом поле и один на чёрном, поэтому общее число белых концов отрезков равно общему числу их чёрных концов. Так как каждый конь находится под боем одного и того же числа коней, из каждой клетки, на которой стоит конь выходит одно и то же количество отрезков, значит, коней, стоящих на чёрных полях доски столько же, сколько коней, стоящих на белых её полях. Но 21 — число нечётное. Противоречие.

Примечание. Пункт а) несколько нагляднее, так как в нём проведённые отрезки образовывали бы непересекающиеся по вершинам замкнутые ломаные, цвета вершин которых должны чередоваться. В каждой такой ломаной должно быть чётное число вершин — противоречие с нечётностью числа 21.

Ответ: а) Не могло. б) Не могло.

РЕШЕНИЯ
7 класс

7.1. *Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a+bc=(a+b)(a+c)$. Докажите, что эти числа также удовлетворяют соотношению $b+ca=(b+c)(b+a)$.*

Решение. Каждое из равенств после раскрытия скобок, приведения подобных и сокращения на ненулевое число (первое равенство на a, второе — на b) приводится к равносильному равенству $a+b+c=1$.

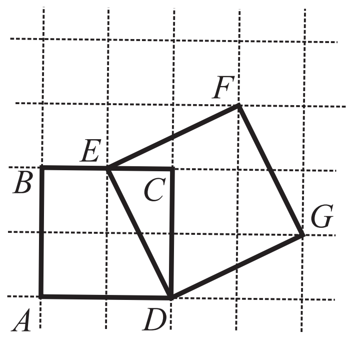
7.2. *По кругу записаны N натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Верно ли, что обязательно найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством, если:*
а) $N=7$;
б) $N=8$?

Решение. а) Покажем, что обязательно найдутся три последовательных (в порядке размещения на окружности) числа x, y и z, такие что $x \geqslant y \geqslant z$. (В этом случае x делится на y, y делится на z, значит x делится на z. Числа x и z — не соседние, поэтому пара не соседних чисел с требуемым свойством будет найдена.) Пусть это не так. Занумеруем числа $x_1, x_2, \ldots, x_7$ в порядке их следования по окружности. Пусть $x_1 \geqslant x_2$ (второй случай аналогичен). Тогда $x_2 < x_3$ (иначе $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$), $x_3 > x_4$ (иначе $x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2$), $x_4 < x_5$ и т. д. вплоть до $x_7 > x_1$. Но тогда $x_7 \geqslant x_1 \geqslant x_2$ — противоречие.

б) Такой пары может не найтись. Один из примеров такой. Выберем любые 4 простых числа, на нечётные места поставим эти числа, а на чётные — произведение соседей. Например, если выбраны числа $p_1=3$ $p_2=2$ $p_3=7$, $p_4=17$, то получится такая последовательность: 3, 6, 2, 14, 7, 119, 17, 51.

Ответ: а) Верно. б) Неверно.

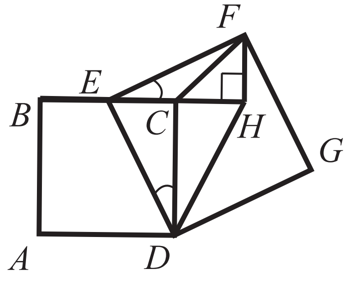
7.3. *На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $DEFG$ с общей вершиной D, причем известно, что E — середина отрезка BC. Найдите величину угла $\angle DCF$. Ответ обоснуйте. При обозначении вершины квадратов указаны по часовой стрелке.*



К решению задачи 7.3
Способ первый

Решение. Первый способ. Нарисуем квадраты на клетчатой бумаге так, как на рисунке. Тогда очевидно, что искомый угол равен $90° + 45° = 135°$.

Второй способ. Опустим перпендикуляр FH из вершины F на прямую BC. Треугольники EFH и DEC будут равны, как прямоугольные с равными гипотенузами ($DE=EF$) и острыми углами ($\angle EDC = \angle FEH$, так как стороны этих углов перпендикулярны). Значит, $EH=CD=BC$ и $FH=EC$. Но тогда $CH=CE=FH$, треугольник CFH прямоугольный и равнобедренный, откуда $\angle HCF = 45°$. Тогда $\angle DCF = \angle DCH + \angle HCF = 90° + 45° = 135°$.



К решению задачи 7.3
Способ второй

Ответ: $135°$.

7.4. *Определите, сколько различных решений имеет ребус*

$$\text{У} > \text{Н} > \text{И} > \text{В} > \text{Е} < \text{Р} < \text{С} < \text{А} < \text{Л}.$$

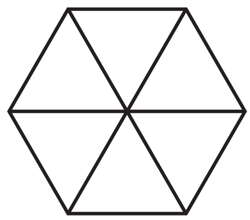
(Различные буквы обозначают различные цифры.) Ответ обоснуйте.

Решение. В ребусе фигурирует 9 различных букв. Выбрать 9 цифр из 10, которым эти буквы соответствуют (или, что тоже самое, выбрать одну цифру, которой нет в ребусе) можно 10 способами. Выберем какие-то 9 цифр и рассмотрим сколькими способами мы можем поставить в соответствие выбранные цифры буквам ребуса. Наименьшая из выбранных цифр обязана соответствовать букве Е. Остальные 8 цифр разбиваются на 2 равные группы: цифры первой группы ставятся в соответствие буквам слева от Е, цифры второй — буквам справа. После этого соответствие букв и цифр однозначно (В — наименьшая цифра первой группы, И — вторая по величине цифра этой группы и т. д.). Значит, соответствие устанавливается столькими способами, сколькими можно выбрать 4 цифры из 8 имеющихся, т. е. $C_8^4 = 70$ способами. Всего способов $10 \cdot 70 = 700$.

Ответ: 700 способов.

7.5. *Правильный шестиугольник легко разрезать на 6 равных частей — см. рисунок. Покажите, как разрезать правильный шестиугольник на N равных частей (напомним, что симметричные фигуры также являются равными). Решите задачу в следующих случаях:*

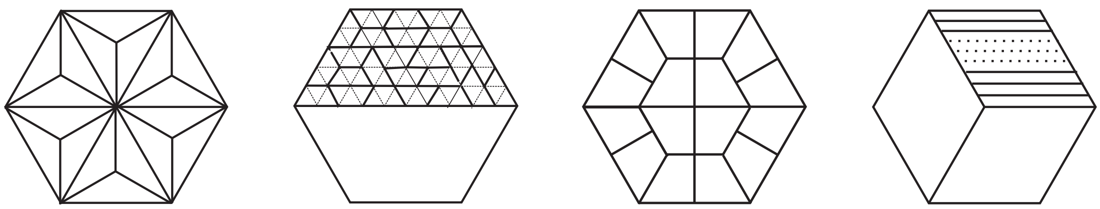
а) $N = 18$;
б) $N = 50$;
в) $N = 16$;
г) $N = 2016$.



К условию задачи 7.5

Решение. а) Каждый из 6-и равных треугольников легко режется на 3 равные части (см. рисунок).

б) Каждый треугольник разрежем на 25 правильных треугольников, для чего разделим каждую его сторону на 5 равных частей и через точки деления проведём прямые, параллельные двум другим его сторонам. Получили $6 \cdot 25 = 150$ равных треугольников. Сгруппируем их по 3, так как показано на рисунке (для наглядности на рисунке разрезана только верхняя половина шестиугольника) и наш шестиугольник распадётся на 50 равных равнобедренных трапеций.



Решение пункта а) Решение пункта б) Решение пункта в) Решение пункта г)

в) Шестиугольник легко разрезать на 8 равнобедренных трапеций. После этого остаётся разделить каждую из трапеций отрезком, соединяющим середины её оснований (см. рисунок).

г) Шестиугольник легко делится на 3 равных ромба. Каждый параллелограмм (и ромб в частности) можно разрезать на любое число равных параллелограммов отрезками, параллельными его стороне (см. рисунок). Так как $2016 : 3 = 672$, нам следует разделить каждый ромб на 672 равных параллелограмма.

РЕШЕНИЯ
8 класс

РЕШЕНИЯ
8 класс

8.1. *Существует ли такое состоящее из различных цифр трёхзначное число N, из которого последовательным вычёркиванием цифр можно получить двузначное число M и однозначное число K такие, что все три числа M, N, K делятся на 7?*

Решение. Анализируем задачу с конца. Число K — либо 0, либо 7. Число M имеет один из трёх видов $\overline{x0}$, $\overline{x7}$, $\overline{7x}$ для некоторой цифры x. Единственное, кратное 7 число такого вида — число 70 (число 77 не подойдёт, так как в нём есть одинаковые цифры). Значит, число M либо $\overline{x70} = 100x + 70$, $\overline{7x0} = 700 + 10x$, $\overline{70x} = 700 + x$ (x — цифра). Из делимости M на 7 следует, что во всех случаях x тоже делится на 7. Но делящиеся на 7 цифры — 0 и 7 уже заняты. Значит, требуемого числа не найти.

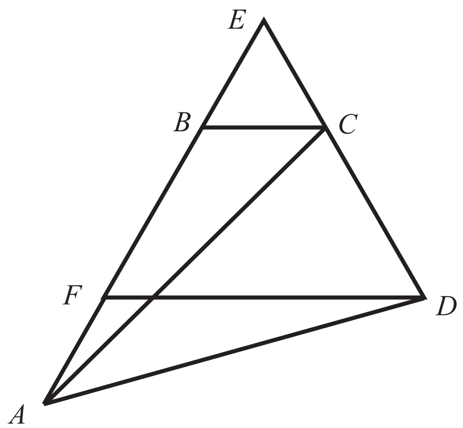
Ответ: Не существует.

8.2. *В фирме работают семеро охранников. Каждый день трое из них должны нести службу, а четверо — отдыхать. Помогите директору фирмы составить такое расписание на 7 рабочих дней так, чтобы любые два охранника вместе работали ровно один день.*

Решение. Обозначим охранников заглавными буквами русского алфавита, А, Б, В, Г, Д, Е и Ё. Штатное расписание на неделю может выглядеть, например так (против дня недели указаны дежурившие в эти дни сотрудники).

Пн. — А, Б, В; Вт. — Б, Г, Е; Ср. — А, Г, Д; Чт. — В, Г, Ё; Пт. — А, Е, Ё; Сб. — Б, Д, Ё; Вс. — В, Д, Е.

8.3. *В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120°$, а $BC+CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.*

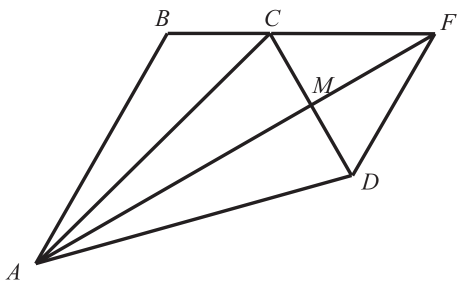


К решению задачи 8.2
первый способ

Решение. Первый способ. Продолжим стороны AB и DC до их пересечения в точке E. В силу равенства $\angle B = \angle C = 120°$, треугольник BCE — равносторонний. Отметим на стороне AB точку F так, что $BF = CD$ (см. рисунок) — треугольник FED также будет равносторонним: $FE = FB + BE = CD+CE = DE$ и $\angle E = 60°$. Кроме того, ввиду равенства $BC+CD = AB$, получаем, что $AF = BC = BE$, а тогда $AB = FE = FD$. Теперь треугольники AFD и ABC равны по двум сторонам и углу между ними ($AF = BC$, $FD = AB$, $\angle AFD = 120° = \angle ABC$). Значит, $AC = AD$, ч. т. д.

Второй способ. На продолжении стороны BC за точку C отметим точку F такую, что $FC = CD$ (см. рисунок). Тогда треугольник CFD равнобедренный с внешним углом в $120°$, т. е. равносторонний. Кроме того, $BF = BC + CF = BC + CD = AB$. Тогда треугольник ACF — равнобедренный с углом $120°$. Значит, $\angle BFA = 30°$. Обозначим через M точку пересечения отрезков CD и AF. В треугольнике CFD отрезок FM — биссектриса, тогда он в нём — медиана и высота, т. е. M — середина стороны CD и $AF \perp CD$.

Но тогда в треугольнике ACD высота совпала с медианой, значит, он равнобедренный. Утверждение доказано.



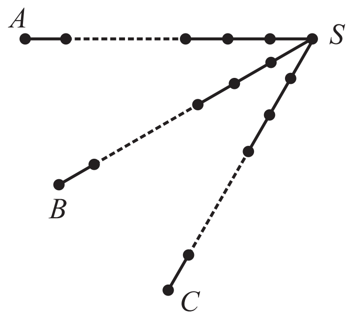
К решению задачи 8.2 второй способ

8.4. *Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1 и произведения двух других чисел. Какому числу может равняться сумма трёх попарных произведений этих чисел? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Пусть эти числа равны x, y и z соответственно. Тогда имеет место система $\begin{cases} x^2 &= 1+yz \\ y^2 &= 1+zx \\ z^2 &= 1+xy \end{cases}$. Вычтем из первого уравнения второе, получим $x^2-y^2=z(y-x)$. Так как числа различны, $y-x\neq 0$ и на эту разность можно сократить. Получим необходимое для выполнения системы условие $x+y+z=0$. Возведём последнее равенство в квадрат, получим $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$. С другой стороны, просуммировав все три уравнения системы, получим $x^2+y^2+z^2=3+(xy+yz+zx)$. Тогда $3+3(xy+yz+zx)=0$, откуда $xy+yz+zx=-1$.

Для завершения решения необходимо показать, что число -1 может быть получено (или, что то же самое, система имеет решение). Достаточно просто подобрать любую подходящую тройку чисел. Например, $x=-1$, $y=1$, $z=0$. Легко убедиться, что она подходит под условие задачи.

Ответ: -1.



К решению задачи 8.5 (а)

8.5. 2016 *городов страны соединены постоянными авиарейсами так, что из каждого города можно долететь в каждый (возможно, с пересадками). Расстояние между двумя городами — это минимальное количество авиаперелётов, которое нужно совершить, чтобы попасть из одного города в другой. Правительство страны пожелало улучшить систему авиалиний. Для этого были выбраны два города, расстояние между которыми максимально, и введён соединяющий их дополнительный авиарейс (заметим, что после этого могли уменьшиться расстояния и между какими-то другими городами). Затем снова были выбраны два города, расстояние (т. е. новое расстояние) между которыми максимально, введён соединяющий их авиарейс и т. д. Всего было введено N новых авиарейсов. Могло ли так случиться, что после этого расстояние между какими-то двумя городами осталось больше, чем S? Решите задачу в следующих случаях:*

а) $N=1$, $S=1100$*;*

б) $N=2$, $S=2000$*;*

в) $N=3$, $S=805$*;*

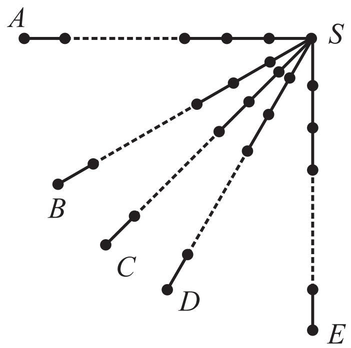
г) $N=1$, $S=1700$.

Решение. а) Предположим, что система авиарейсов была такой, как указано на рисунке: столица — город S — соединяется с тремя провинциальными городами A, B, C длинными цепочками авиарейсов. Пусть на прогоне SA 671 промежуточный город (т. е.

расстояние от S до A равно 672), столько же городов на прогоне SB, а остальные 670 — на прогоне SC. Тогда будет введён рейс AB, а расстояние от C до A (равно как и до B) не изменится, т. е. останется равным 1343. Значит, ситуация, описанная в пункте а), возможна.

б), г) Покажем, что уже после одного введённого рейса (и тем более после двух) расстояние между любыми городами будет заведомо меньше 1700 (и тем более меньше 2000). В самом деле, пусть это не так, и был введён рейс AB. Это значит, что изначально кратчайший маршрут из A в B был не меньше 1700 и, значит, насчитывал не менее 1699 промежуточных городов. После введения авиарейса AB указанный маршрут и введённый авиарейс образовали цикл. В этом цикле не больше городов, чем во всей стране, т. е. не больше, чем 2016, поэтому от любого города цикла до любого можно добраться не более, чем с 1007 пересадками (по кратчайшей дуге цикла). Пусть в цикле x городов ($x > 1700$) Рассмотрим произвольный город C вне рассматриваемого цикла. От него до любого другого города D (неважно, в цикле или вне него) есть такой маршрут: кратчайший путь от C до одного из городов цикла E, затем по кратчайшей дуге цикла до некоторого города F, и, наконец, от города F в город D уже не посещая других городов цикла. Ясно, что при таком маршруте по крайней мере $\frac{x-2}{2}$ городов цикла останется не посещёнными (если x — нечётно, то $\frac{x-3}{2}$). Так как $x > 1700$, то непосещёнными будут по крайней мере 849 городов. Тогда в маршруте CD городов не больше, чем $2016 - 849 = 1167$, поэтому длина такого маршрута не больше 1166. Значит, между любыми городами есть маршрут длины не более 1166. Противоречие.

в) Предположим, что система авиарейсов была такой, как указано на рисунке: столица — город S — соединяется с пятью провинциальными городами A, B, C, D, E длинными цепочками авиарейсов. Пусть на прогоне SA 403 промежуточных города (т. е. расстояние от S до A равно 404), на прогонах SB, SC, SD по 402 промежуточных города и на прогоне SE — 401 промежуточный город. Тогда самые большие расстояния межу городом A и каждым из городов B, C и D (они равны 807 каждое). Сперва будет введён один из рейсов AB, AC или AD (пусть AB), но его введение не уменьшит расстояния между городами A и C (равно как и A и D). Рейсы AC и AD — будут следующими двумя введёнными. Эти три введённых маршрута не изменят расстояние от A до E (хотя теперь кратчайших маршрутов между этими городами будет 4: из A допустимо вылетать любым авиарейсом из имеющихся). Это расстояние равно $404 + 402 = 806 > 805$. Значит, ситуация описанная в пункте в) возможна.



К решению задачи 8.5 (в)

Ответ: а), в) Могло; б), г) Не могло.

РЕШЕНИЯ

9 класс

9.1. *На координатной плоскости изображена гипербола — график функции* $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \neq 0)$*. Прямая* l *пересекает гиперболу в точках с абсциссами* k_1 *и* k_2*, а ось абсцисс — в точке с абсциссой* k_3*. Докажите, что* $k_1 + k_2 = k_3$*.*

Решение. Прямая l, очевидно, не вертикальная, так как иначе она пересекла бы гиперболу только в одной точке. Пусть уравнение прямой $y = tx+b$. Тогда $0 = tk_3+b$, откуда $b = -tk_3$ и уравнение прямой имеет вид $y = tx - tk_3$. Чтобы найти координаты точек пересечения прямой l и заданной гиперболы, достаточно решить систему $\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ y = tx - tk_3 \end{cases}$.
Подставим значение из первого уравнения системы во второе. Второе уравнение примет вид $\dfrac{a}{x} = tx - tk_3$ или $tx^2 - tk_3x - a = 0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь два корня k_1 и k_2. По теореме Виета $k_1 + k_2 = -\dfrac{-tk_3}{t} = k_3$, ч. т. д.

9.2. *В некоторой компании каждый человек является либо рыцарем (т. е. всегда говорит правду), либо лжецом (т. е. всегда лжёт). Каждый из них сказал по фразе:*

1-й: Среди нас ровно 1 *рыцарь.*
2-й: Среди нас ровно 2 *лжеца.*
3-й: Среди нас ровно 3 *рыцаря.*
...
$2k$*-й: Среди нас ровно* $2k$ *лжецов*
$2k+1$*-й: Среди нас ровно* $2k+1$ *рыцарей*
...

Сколько могло быть людей в компании, если известно, что среди них есть по крайней мере один рыцарь? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение. Заметим, что высказывания людей с нечётными номерами противоречат друг другу, значит, среди последних не более одного рыцаря. Также противоречат друг другу высказывания людей с чётными номерами; среди этих людей также не больше одного рыцаря. Значит, рыцарей не более двух. Если их ровно 2, то все высказывания людей с чётными номерами ложны, и рыцаря среди этих людей нет — противоречие. Итак, рыцарь только один и это именно тот, кто сказал первую фразу. Значит все фразы типа "среди нас ровно $2k$ лжецов" принадлежат лжецам, потому неверны. Так как все возможные чётные числа, начиная от 2 и заканчивая количеством человек в компании, в этих фразах упомянуты, число лжецов в компании не может быть чётным, отличным от 0. Итого, компания состоит из одного рыцаря, а лжецов в ней либо нечётное количество, либо нет совсем. Любая такая компания подходит, как нетрудно убедиться.

Ответ: Либо 1, либо любое чётное количество человек.

9.3. *Найдите все пары натуральных чисел* $(m;\ n)$ *таких, что любое* m*-значное число-палиндром (т. е. число, десятичная запись которого читается одинаково справа налево и слева направо) делилось бы на* n *без остатка.*

Решение. Ясно, что все пары $(m;\ 1)$ подходят, так как на 1 делится любое натуральное число (не обязательно палиндром). Пусть $n > 1$. Тогда n не делится ни на 2, ни на 5: на такие n не делится никакой палиндром, последняя цифра которого, например, равна 7. Рассмотрим два случая.

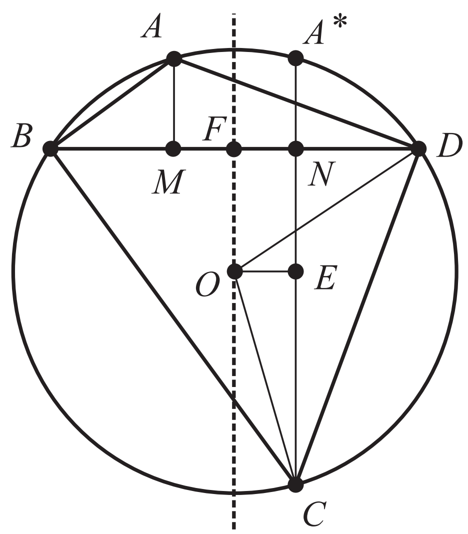
1) Число m — нечётно. Тогда у m-значного числа-палиндрома есть средняя цифра. Изменим её на 1 (неважно в какую сторону). Получим число-палиндром, отличающееся от исходного на $100\ldots0$ (количество нулей равно $\frac{m-1}{2}$). По условию оба числа делятся на n, потому на n делится и их разность. Но число $100\ldots0$ делится только на произведение двоек и пятёрок, а такие n нас не устраивают. Значит, в этом случае нужных нам пар нет.

2) Число m — чётно. Тогда средних цифр у m-значного числа-палиндрома две, и они равны. Увеличим их обе на 1 (или уменьшим, если эти цифры равны 9). Получим число-палиндром, отличающееся от исходного на $1100\ldots0$. Как и в предыдущем случае, оно делится на n. Но единственное число, не кратное ни двум ни пяти, на которое делится $1100\ldots0$ — число 11. Итак, в этом случае $n = 11$. По признаку делимости на 11 легко проверяется, что всякое число-палиндром с чётным числом цифр на 11 делится (знакопеременная сумма цифр такого числа равна, очевидно, нулю).

Ответ: Все пары вида $(k;\ 1)$ и вида $(2k;\ 11)$ (k — натуральное число).

9.4. *Из вершин A и C четырёхугольника $ABCD$ опустили перпендикуляры AM и CN на диагональ BD, которые разбили её на три равные части, причём $AM = a$, $CN = b$. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Найдите её радиус.*

Решение. Рассмотрим осевую симметрию относительно серединного перпендикуляра к диагонали BD (на рисунке он изображён пунктиром). При ней описанная окружность перейдёт в себя, так как центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой своей хорде. Точка M переедет в точку N и наоборот, так как $BM = ND$, значит, прямая AM перейдёт в прямую BN, а точка — в точку A^*, лежащую на пересечении прямой BN и окружности. Тогда $AM = A^*N = a$ и $A^*C = a + b$.



К решению задачи 9.4

Пусть O — центр описанной окружности, R — её радиус, точки E и F — середины хорд A^*C и BD соответственно. Ещё обозначим длину хорды BD через $6x$. Тогда $FN = OE = x$. Кроме того $OF = NE = 0,5A^*C - A^*N = \frac{|a-b|}{2}$. Из треугольника OEC имеем $R^2 = x^2 + \frac{(a+b)^2}{4}$, из треугольника OFD имеем $R^2 = 9x^2 + \frac{(a-b)^2}{4}$. Выразив x^2 из одного уравнения и подставив в другое, получим $R^2 = 9R^2 - 9\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4}$, откуда $R = \sqrt{\frac{2a^2+5ab+2b^2}{8}}$.

Ответ: $R = \sqrt{\frac{2a^2+5ab+2b^2}{8}}$.

9.5. *Дед Мороз принёс на ёлку мешок с подарками. Известно, что количество подарков в мешке не меньше, чем количество детей, пришедших на ёлку. Каждому ребёнку какие-то подарки понравились, а какие-то — не понравились. Всегда ли Дед Мороз сможет подарить каждому ребёнку по одному подарку так, чтобы каждый ребёнок получил подарок, который ему нравится? Решите эту задачу в следующих случаях:*

1) Каждому ребёнку нравится ровно 2 подарка, и каждый подарок нравится не более, чем 2-м детям;

2) Каждому ребёнку нравится не менее 3-х подарков, и каждый подарок нравится не менее, чем 3-м детям.

3) Каждому ребёнку хотя бы один подарок нравится, и всем детям нравится разное количество подарков;

4) Каждому ребёнку нравится ровно 3 подарка, и каждый подарок нравится ровно 2-м детям.

Решение. а) Дед Мороз может сделать так. Попросить любого ребёнка показать два понравившихся ему подарка. Один из них (любой) он дарит этому ребёнку, а второй — тому из оставшихся, которому этот подарок тоже нравится. Этот второй ребёнок в свою очередь показывает другой понравившийся ему подарок, который Дед Мороз дарит третьему ребёнку (тому, которому он нравится). Тот тоже указывает второй понравившийся ему подарок и т. д. Этот процесс завершится тогда, когда очередной ребёнок заметит, что второй нравившиеся ему подарок уже подарен. И подарен он может быть только самому первому ребёнку. Это значит, что часть детей уже получили нравящиеся им подарки, а каждому из остальных нравится ровно два подарка из ещё нерозданных. И по-прежнему, каждый оставшийся у Деда Мороза подарок нравится ровно двум ещё не получившим подарка детям. Тогда процесс повторяется. Так как детей конечное число, все дети уйдут с подарками по своему вкусу (и все подарки будут розданы).

б) Пусть, например, детей всего 9 и среди них ровно 5 мальчиков. А в подарках у Деда Мороза 4 машинки и много кукол (больше 5). При этом мальчикам нравится любая из машинок, а девочкам — любая из кукол. Условие пункта б) выполнены. Но ясно, что одарить мальчиков так, чтобы каждый получил машинку, не удастся, так как их пятеро, а машинок всего 4.

в) Будем одаривать детей в порядке возрастания числа подарков, которые им нравятся. Заметим, что первому ребёнку нравится не менее одного подарка, второму — не менее двух, третьему — не менее трёх и вообще ребёнку с номером n нравится не менее n подарков. Тогда к моменту получения подарка n-м ребёнком, роздано ровно $n-1$ подарок, и значит, хотя бы один подарок который этому ребёнку нравится, у Деда Мороза есть. Вот его и дарим. В конце процесса все дети снова с подарками и счастливы.

г) Один из возможных процессов организовать такую выдачу подарков следующий. Дети подходят по одному и выбирают себе любой понравившийся им подарок, но пока не уходят с ним, а просто держат в руке. Если очередной ребёнок (назовём его обиженным) видит, что все три понравившихся ему подарка на руках, он указывает на тех троих, которые эти подарки держат (завидует им). Каждый из этих троих в свою очередь указывает на те два подарка, которые он не взял, но которые ему нравятся. Если эти подарки у кого-то на руках, будем говорить, что он завидует их обладателю. Каждый из тех, кому позавидывали, делает тоже самое. Заметим, что так как каждый подарок нравится двоим, каждому ребёнку может позавидовать только один ребёнок, поэтому на каждом шаге либо общее количество тех, кому позавидовали, будет расти (что не может продолжаться бесконечно), либо в какой-то момент кто-то из тех кому позавидовали, укажет на подарок, который ещё не подарен. Тогда он берёт себе этот подарок, а свой отдаёт тому, кто ему позавидовал. Получивший новый подарок делает то же самое, и в конце-концов обиженный ребёнок получит подарок из рук одно из тех, кому он позавидовал. Теперь выбирает подарок следующий ребёнок и процесс выдачи подарков продолжается до тех пор, пока не закончатся не одаренные Дедом Морозом дети.

Примечание. Если применить известную теорему о парасочетаниях в двудольном графе к данной задаче, то получится критерий, определяющий в каких случаях можно организовать раздачу подарков в соответствие со вкусами детей, а в каких — нет. Оказывается для возможности такой раздачи необходимо и достаточно, чтобы для любой подгруппы детей суммарное число подарков, которые нравятся этим детям, было не меньше числа детей в подгруппе.

Ответ: 1), 3), 4) да; 2) нет.

РЕШЕНИЯ
10 класс

10.1. *Вовочка узнал, что оказывается, при $|q| < 1$ можно посчитать бесконечную сумму $b+bq+bq^2+\ldots$, и эта сумма будет равна $\dfrac{b}{1-q}$. Также ему сообщили, что можно посчитать и более сложную сумму: $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots$ (по-прежнему $|q| < 1$), но чему она равна, так и не сказали. Помогите Вовочке найти эту сумму.*

Решение. Вовочка знает, что

$$\begin{aligned} 1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots &= \frac{1}{1-q}, && (1)\\ q+q^2+q^3+q^4+\ldots &= \frac{q}{1-q}, && (2)\\ q^3+q^4+\ldots &= \frac{q^2}{1-q}, && (3)\\ \ldots &= \ldots && (4) \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части всех уравнений и приводя подобные, имеем

$$1+2\cdot q+3\cdot q^2+4\cdot q^3+\ldots = \frac{1}{1-q}(1+q+q^2+\ldots) = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{(1-q)^2}$.

10.2. *Существует ли такой многочлен $Q(x)$, что для всех простых чисел p имеет место равенство $Q(p) = \sqrt{p}$?*

Решение. Предположим, что такой многочлен $Q(x)$ есть. Тогда для бесконечного количества чисел (для всех простых) x верно равенство $Q(x) = \sqrt{x}$, из которого следует, что уравнение $Q^2(x) - x = 0$ имеет бесконечное число корней. Но левая часть выражения — многочлен (не тождественно равный нулю ввиду чётности многочлена $Q^2(x)$), и он имеет не более чем конечное число корней. Противоречие. Следовательно, такого многочлена нет.

Ответ: Не существует.

10.3. *Петя загадал трёхзначное число $\overline{abc}$ (возможно, в его десятичной записи встречаются нули). После этого он сказал Васе сумму пяти, уже не обязательно трёхзначных, не обязательно разных, чисел $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Всегда ли Вася по этой информации может однозначно восстановить число Пети? Ответ обосновать.*

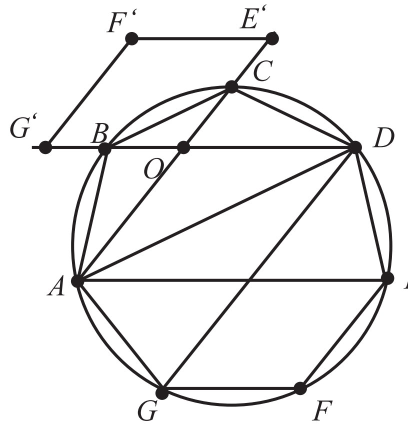
Решение. Пусть искомое число $x = \overline{abc}$, а известно число $S(x) = \overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}$. Тогда $S(x)+x = \overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba} = 222(a+b+c)$.

Предположим, что восстановить число не всегда возможно Тогда для каких-либо чисел $x = \overline{abc}$ и $y = \overline{a'b'c'}$ суммы $S(x), S(y)$ совпадают. Отсюда число $x-y = S(x)+x-S(y)-y = 222(a-a'+b-b'+c-c')$ кратно 222. Теперь x, y имеют один и тот же остаток от деления на 3, значит и их суммы цифр такие же, отсюда число $a-a'+b-b'+c-c'$ кратно 3. Теперь x, y имеют один и тот же остаток от деления на 9, и $a-a'+b-b'+c-c'$ кратно 9, то есть $x-y$ кратно $9\cdot 222 = 1998$. Поскольку x, y по предположению различны, то их разность отличается хотя бы на 1998. Но это невозможно, поскольку они трёхзначные числа.

Следовательно, по полученной информации восстановить число можно.

Ответ: Может.

10.4. *Дан правильный семиугольник $ABCDEFG$. Точка O — точка пересечения диагоналей в трапеции $ABCD$. Докажите, что $AB + AO = AD$.*

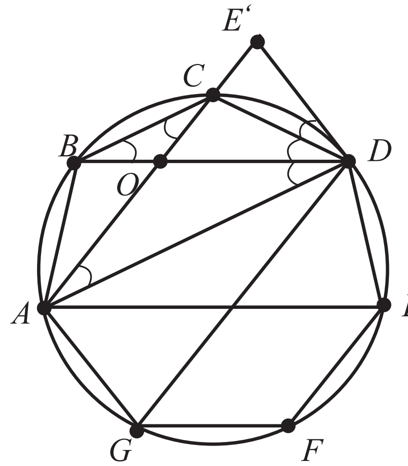


К решению задачи 10.4 (первый способ)

Решение. Первый способ. Пусть $ABCDEFG$ — правильный семиугольник, поскольку его можно вписать в окружность и все дуги $\smile AB$, $\smile BC$,$\smile CD$,$\smile DE$,$\smile EF$, $\smile FG$ равны между собой, мы имеем, в частности равенства вписанных углов $\angle DAC = \angle DAE = \angle ADB = \angle ADG$. Отразим относительно прямой AD точки EFG получая точки E', F', G'. При этом равные углы перейдет ы равные, но тогда в силу указанного выше равенства углов, совпадут пары лучей AC и AE', DB и DG'. В частности, точка O — лежит на пересечении AE' и DG'.

Покажем, что $OE'F'G'$ — параллелограмм. Действительно, из симметрии имеем $\angle F'G'O = \angle F'E'O$, Кроме того AC и BD параллельны EF и FG соответственно. Отсюда равны углы $\angle AOD$, $\angle EFG$. Но тогда равны и $\angle G'OF'$, $\angle E'F'G'$.

Поскольку $OE'F'G'$ — параллелограмм, имеем $OE' = G'F' = GF = AB$, то есть $AE' = AO + OE' = AO + AB$. Поскольку из симметрии, имеем $AE' = AE = AD$, то $AD = AO + AB$.



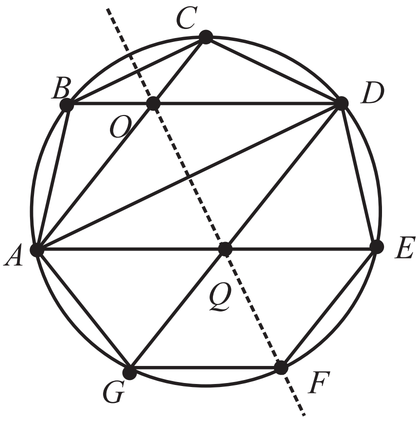
К решению задачи 10.4 (второй способ)

Второй способ. Продлим AO за точку O так, чтобы длина отрезка была равна AD (получится отрезок AE'). Обозначим за x угол $180°/7$. Тогда $\angle DAE' = x$, $\angle AE'D = \angle ADE' = 3x$, $\angle ODA = \angle CDO = x$, следовательно, $\angle E'DC = x$, $\angle E'CD = 3x$, т. е. треугольник $E'CD$ — равнобедренный. $\angle E'OD = 2x$, т.е. треугольник $E'OD$ — равнобедренный. Отсюда $OE' = E'D = CD = AB$, т. е. $AD = AE' = AO + AB$.

Третий способ. Пусть диагонали AE и GD пересекаются в точке Q (см. рисунок). Рассмотрим симметрию относительно прямой, проходящей через вершину F и центр описанной около семиугольника окружности. При такой симметрии друг в друга перейдут вершины G и E, A и D, B и C. Значит, отрезок AC перейдёт в отрезок DB, и их точка пересечения — точка O — перейдёт в себя. Это значит, что точка O лежит на оси симметрии. То же верно и для точки Q (доказательство аналогичное). Теперь заметим, что четырёхугольник $FGQE$ — параллелограмм ($AE \parallel GF$, так как дуги AG и FE равны, $GD \parallel FE$ по аналогичной причине), причём он симметричен относительно своей диагонали FQ. Но тогда он — ромб и $QE = GF = AB$. Четырёхугольник $AQDO$ — тоже ромб (доказательство аналогично), поэтому $AO = AQ$. Тогда $AB + AO = AQ + QE = AE$. Остаётся заметить, что $AE = AD$, так как эти хорды стягивают равные дуги.

10.5. *По периметру круглой сковороды выложено 8 котлет, на равном расстоянии одна от другой. Известно, что вес самой лёгкой котлеты свыше 100 г, котлета, соседняя с самой лёгкой (по часовой стрелке) ровно на 5 г тяжелее, следующая по часовой стрелке*

— ещё на 5 г тяжелее и т. д. (в частности, котлета, соседняя с самой лёгкой против часовой стрелки, тяжелее её на 35 г). Также имеются чашечные весы (без гиръ), на обе чашки которых можно класть любое количество котлет из имеющихся. Эксперт желает с их помощью найти самую тяжёлую котлету.



К решению задачи 10.4 (третий способ)

1) Предположим, что эксперт первым взвешиванием сравнил веса двух лежащих рядом котлет и после этого без других взвешиваний смог однозначно найти самую тяжёлую. Какие котлеты попали на весы?

2) Сорока принесла на хвосте весть, что самая тяжёлая котлета — одна из трёх подряд лежащих (и указала эксперту эти три котлеты). Покажите, как теперь эксперт может решить задачу всего за 1 взвешивание.

3) Покажите, что если бы Сорока указала эксперту на 4 произвольные котлеты, среди которых есть самая тяжёлая, то эксперт не смог бы гарантированно решить задачу за одно взвешивание (независимо от того, на какие 4 котлеты указала бы сорока).

4) Докажите, что если эксперт первым взвешиванием сравнит веса двух любых котлет, то может случиться, что двух взвешиваний ему не хватит, чтобы гарантированно решить задачу.

5) Как эксперту гарантированно найти самую тяжёлую котлету за два взвешивания?

Решение. 1) Если котлета, лежащая левее, не самая тяжёлая (из 8), то она на 5 г легче своей соседки, и весы покажут, что правая котлета перевесила. В этом случае самая тяжёлая котлета — любая из семи (не подойдёт только та, которая оказалась на лёгкой чашке весов). Ясно, что тогда эксперту задачу не решить. Значит, весы показали другой исход: котлета справа оказалась легче. Это возможно только тогда, когда она самая лёгкая, а её соседка — самая тяжёлая. Именно эти котлеты и оказались на весах.

Ответ: самая тяжёлая и самая лёгкая котлеты.

2) Занумеруем котлеты натуральными числами по часовой стрелки так, что первые три котлеты — те, которые указала Сорока.

Пусть a_n — вес n-ой котлеты ($1 \leqslant n \leqslant 8$), а t — вес самой лёгкой. В зависимости от того, какая котлета самая тяжёлая, возможны три варианта: 1) $a_1 = t + 35$, $a_2 = t$, $a_3 = t + 5$, $a_4 = t + 10$, $\ldots$; 2) $a_1 = t + 30$, $a_2 = t + 35$, $a_3 = t$, $a_4 = t + 5$, $\ldots$; 3) $a_1 = t + 25$, $a_2 = t + 30$, $a_3 = t + 35$, $a_4 = t$, $\ldots$. Надо придумать такое взвешивание, чтобы в одном случае перетянула левая чашка весов, в одном — правая, и ещё в одном наблюдалось равновесие. Например, можно на левую чашку положить 1-ю и 4-ю котлету, на правую — 2-ю и 3-ю. Тогда в первом случае разность левой и правой чашкой равна $t + 35 + t + 10 - t - (t + 5) = 40 > 0$ (левая чашка перетянула), во втором разность равна $t + 30 + t + 5 - (t + 35) - t = 0$ (равновесие) и в третьем случае перетягивает правая чашка: $t + 25 + t - (t + 30) - (t + 35) = -40 < 0$. Во всех случаях тяжёлая котлета находится однозначно.

3) По указанием Сороки допустимы 4 гипотезы (какая из 4-х указанных котлет наитяжелейшая). При любом взвешивании возможны три исхода: перетянула левая чашка, перетянула правая чашка, чашки равновесны. По принципу Дирихле какому-то

результату соответствуют каким-то двум гипотезам (как минимум). Если такой результат будет иметь место, определить какая же из соответствующих ему гипотез правильная, будет невозможно.

4) Изначально есть 8 гипотез. Чтобы за второе взвешивание можно было гарантированно решить задачу, необходимо, чтобы каждому из возможных исходов первого взвешивания соответствовало не более 3 гипотез. Но исходов первого взвешивания может быть только два (равновесие невозможно), поэтому по принципу Дирихле какому-то исходу соответствуют не менее 4-х гипотез.

5) Как следует из предыдущих пунктов, первое взвешивание должно разделять 8 гипотез на 3 группы, не более, чем по 3 гипотезы в каждом. Этому требованию соответствует два взвешивания: либо на одну чашку весов положить 2 соседние котлеты, а на другую — две противоположные им, либо на одну чашку 4 котлеты подряд, на вторую — четыре оставшиеся. Оба этих взвешивания позволяют решить задачу. Например, пусть на левой чашке котлеты с номерами 1 и 2, на правой — с номерами 5 и 6 (нумерация, как в решении пункта 2). Тогда, как легко проверить, равенство получится, если самая тяжёлая котлета имеет номер 1 или 5 (и в этом случае вторым взвешиванием достаточно просто сравнить эти котлеты), левая чашка перетянет, если самая тяжёлая котлета имеет номер 2, 3 или 4, правая — если 6, 7 или 8. В обоих последних случаях мы пришли к задаче пункта 2.

РЕШЕНИЯ
11 класс

11.1. *На координатной плоскости изображена гипербола — график функции $y = \dfrac{a}{x}$ $(a \neq 0)$. Прямая l пересекает гиперболу в точках с абсциссами k_1 и k_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой k_3. Докажите, что $k_1 + k_2 = k_3$.*

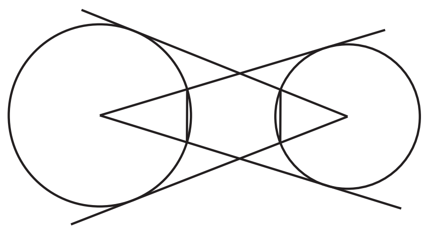
Решение. Прямая l, очевидно, не вертикальная, так как иначе она пересекла бы гиперболу только в одной точке. Пусть уравнение прямой $y = tx + b$. Тогда $0 = tk_3 + b$, откуда $b = -tk_3$ и уравнение прямой имеет вид $y = tx - tk_3$. Чтобы найти координаты точек пересечения прямой l и заданной гиперболы, достаточно решить систему $\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ y = tx - tk_3 \end{cases}$. Подставим значение из первого уравнения системы во второе. Второе уравнение примет вид $\dfrac{a}{x} = tx - tk_3$ или $tx^2 - tk_3x - a = 0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь два корня k_1 и k_2. По теореме Виета $k_1 + k_2 = -\dfrac{-tk_3}{t} = k_3$, ч. т. д.

11.2. *Существует ли такой многочлен $Q(x)$, что для всех простых чисел p имеет место равенство $Q(p) = \sqrt{p}$?*

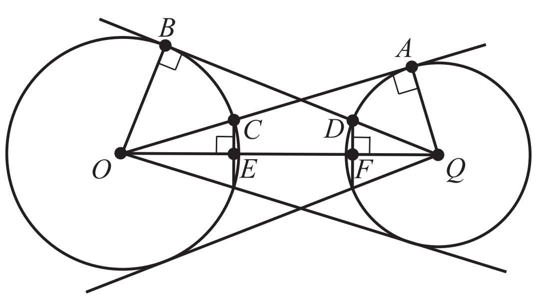
Решение. Предположим, что такой многочлен $Q(x)$ есть. Тогда для бесконечного количества чисел (для всех простых) x верно равенство $Q(x) = \sqrt{x}$, из которого следует, что уравнение $Q^2(x) - x = 0$ имеет бесконечное число корней. Но левая часть выражения — многочлен (не тождественно равный нулю ввиду чётности многочлена $Q^2(x)$), и он имеет не более чем конечное число корней. Противоречие. Следовательно, такого многочлена нет.

Ответ: Не существует.

11.3. *Докажите теорему о глазных яблоках: Пусть на плоскости заданы две окружности, расстояние между центрами которых больше суммы их радиусов. Из центра каждой окружности выходят два луча, высекающие из неё дугу, и касающиеся второй окружности (см рисунок). Докажите, что хорды, стягивающие эти высекаемые дуги, равны.*



К условию задачи 11.3



К решению задачи 11.3

Решение. Пусть точки O и Q — центры окружностей, $a = OQ$ — расстояние между центрами, R и r соответственно — их радиусы. Пусть, кроме того, A и B такие точки первой и второй окружностей, что прямые OA и QB — касательные (см. рисунок). Тогда $OB = R$, $QA = r$, $\angle OBQ = \angle OAQ = 90^\circ$. Обозначим через C и D точки пересечения отрезков OA и BQ с первой и второй окружностями соответственно, через E и F — точки пересечения прямой OQ с интересующими нас хордами. В силу симметрии относительно прямой OQ точки E и F будут серединами хорд; нам достаточно доказать, что $CE = DF$. Кроме того, $CE \perp OQ$, как радиус, проведённый в середину хорды, и по той же причине $DF \perp OQ$. Треугольники OEC и OAQ подобны по двум углам (угол при вершине O — общий, а углы при вершинах A и E — прямые), поэтому $\dfrac{CE}{AQ} = \dfrac{OC}{OQ}$, откуда $CE = \dfrac{OC \cdot AQ}{OQ} = \dfrac{R \cdot r}{a}$. Аналогично из подобия треугольников QDF и OBQ получим, что $DF = \dfrac{QD \cdot OB}{OQ} = \dfrac{R \cdot r}{a}$. Тогда $CE = DF$ ч. т. д.

11.4. *В однокруговом шахматном турнире (каждый шахматист играл с каждым по одной партии) участвовало N шахматистов ($N > 2$). По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько партий, сколько ничьих было зафиксировано в партиях, в которых этот участник не играл. Какие значения может принимать N? Ответ обосновать.*

Решение. Первый способ. Рассмотрим итоговую турнирную таблицу. Она представляет собой квадрат со стороной N, в которой по диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний стоят крестики, а остальные клетки заполнены числами 0, 1 или $1/2$, при этом в клетке, стоящей в k-й строке и l-м столбце стоит количество очков, которые набрал k-й шахматист в партии с l-м. Таким образом, каждая ничья даёт в таблице два числа $1/2$, а каждая результативная партия — одну 1 и один 0. Условие задачи заключается в том, что число единиц в любой строке вдвое меньше числа половинок во всех клетках кроме этой строки и столбца с тем же номером. Для каждого натурального числа i из отрезка $[1; N]$ пометим все числа $1/2$, которые не стоят ни в i-ой строке ни в i-м столбце таблицы. Тогда каждое число $1/2$ будет помечено $N-2$ раза (при каждом i, отличном от номера строи и номера столбца). С другой стороны, общее число пометок будет вдвое больше числа единиц, или (так как в таблице нулей и единиц поровну) их будет столько же, сколько в таблице чисел, отличных от $1/2$. Пусть всего в турнире S партий было сыграно вничью. Тогда в таблице $2S$ половинок и $2S(N-2)$ пометок. Всего партий было $\dfrac{N(N-1)}{2}$, результативных из них $\dfrac{N(N-1)}{2} - S$, поэтому общее число пометок также равно $N(N-1) - 2S$. Из равенства $2S(N-2) = N(N-1) - 2S$ получаем, что $N(N-1) = 2S(N-1)$, откуда $2S = N$. Значит, N — чётное число.

Покажем, что любое чётное число возможно. Пусть $N = 2m$. Цвет фигур в партии между игроками с номерами i и j определим правилом: если числа i и j имеют одну чётность — белыми играет игрок с большим номером, разную — с меньшим (именно так и делается при жеребьёвке круговых турниров). Это значит, что в каждой строке турнирной таблицы клетки, соответствующие белой партии, и клетки, соответствующие чёрной, чередуются как до пересечения с главной диагональю, так и после неё. Пусть вничью закончатся партии между игроками с номерами 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 и так вплоть до $N-1$ и N, а в остальных партиях побеждают белые. Тогда у каждого игрока будет ровно $m-1$ выигранная партия. Для игрока с нечётным номером $2k-1$ это партии с игроками с меньшими номерами $1, 3, 5, \ldots, 2k-3$ — всего $k-1$ партия — и партии с игроками с большими номерами $2k+2, 2k+4, \ldots, 2m$ — ещё $m-k$ партий. Для игрока с чётным номером $2k$ это партии с игроками с меньшими номерами $2, 4, 6, \ldots, 2k-2$ — всего $k-1$ партия — и партии с игроками с большими номерами $2k+1, 2k+3, \ldots, 2m-1$ — ещё $m-k$ партий. Вот как выглядит такая таблица для $N = 10$.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	✠	1/2	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1/2	✠	1	0	1	0	1	0	1	0
3	1	0	✠	1/2	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1/2	✠	1	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	✠	1/2	0	1	0	1
6	0	1	0	1	1/2	✠	1	0	1	0
7	1	0	1	0	1	0	✠	1/2	0	1
8	0	1	0	1	0	1	1/2	✠	1	0
9	1	0	1	0	1	0	1	0	✠	1/2
10	0	1	0	1	0	1	0	1	1/2	✠

Второй способ. Пусть i-й участник ($1 \leqslant i \leqslant N$) сыграл вничью a_i партий, а всего ничьих в турнире было x. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i = 2x$, так как каждая ничья учтена в сумме дважды. По условию i-й участник сыграл $N-1$ партию, из которых выиграл $x - a_i$. Тогда он проиграл $(N-1) - a_i - (x - a_i) = N - x - 1$ партий. Это значит, в частности, что число поражений одно и то же у каждого участника. Всего побед было $\sum\limits_{i=1}^{N}(x - a_i) = Nx - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i = Nx - 2x$, а поражений было $N(N-x-1)$. Но общее число поражений равно общему числу побед, т. е. $Nx - 2x = N(N-x-1)$, откуда $x(2N-2) = N^2 - N$ и $x = \dfrac{N}{2}$. Значит, число участников обязано быть чётным, а общее число ничьих равно половине от числа участников.

Покажем, что при любом чётном N такая ситуация возможна. Пусть все $\dfrac{N}{2}$ ничьих случились в партиях одного из участников (назовём его мастером, а остальных участников — гроссмейстерами), а остальные партии мастер проиграл. Расположим гроссмейстеров на окружности на равном расстоянии друг от друга. Для каждой пары гроссмейстеров отметим наименьшую дугу окружности, их соединяющую (она определится однозначно, так как гроссмейстеров нечётное число). Предположим, что в партии любых двоих гроссмейстеров победил тот, кто стоит на правом (если смотреть из центра окружности) конце этой дуги. Тогда в поединках гроссмейстеров каждый выиграл ровно половину своих партий, т. е. $\dfrac{N}{2} - 1$ партий. Число побед гроссмейстера, сыгравшего с мастером вничью, остаётся равным $\dfrac{N}{2} - 1$, что равно числу остальных ничьих. Если же гроссмейстер у мастера выиграл, то у него всего $\dfrac{N}{2}$ побед, и столько же ничейных партий, в которых он не принимал участия. Для мастера оба этих числа равны 0. Условие задачи выполнено.

Ответ: Любое чётное значение.

11.5. *Буратино хочет окрасить каждую диагональ и каждую сторону правильного N-угольника ($N > 3$) в некоторый цвет так, чтобы отрезков каждого использованного цвета было ровно три, и они составляли треугольник. (Различных красок для этого у него достаточно.) Сможет ли он это сделать, если*

а) $N = 7$;
б) $N = 16$;
в) $N = 17$;
г) $N = 21$?

Ответ обосновать.

Решение. а) Занумеруем вершины N-угольника натуральными числами от 1 до 7 (в любом порядке). Буратино может добиться своей цели окрасив такие 7 треугольников (каждый в свой цвет)

1) $\Delta 123$, 2) $\Delta 345$, 3) $\Delta 561$, 4) $\Delta 246$, 5) $\Delta 147$, 6) $\Delta 257$, 7) $\Delta 367$.

Легко убедиться, что каждая пара чисел попала ровно в одну тройку. Это значит, что каждый отрезок будет покрашен ровно в один из 7 цветов.

б) Предположим, что некоторый N-угольник раскрашен требуемым образом. Тогда из каждой его вершины отрезков каждого из цветов выходит либо 2, либо 0. Значит, из любой вершины выходит чётное число отрезков. Но в N угольнике из каждой вершины выходит $N-1$ отрезок (в каждую из других вершин по одному). Значит, N — нечётно. Поэтому $N \neq 16$.

в) Предположим, что некоторый N-угольник раскрашен требуемым образом (из пункта б уже знаем, что N — нечётное число). Подсчитаем общее количество раскрашенных отрезков. Из каждой вершины выходит $N-1$ отрезок ровно, поэтому всего имеем $N(N-1)$ концов отрезков. Так как концов у каждого отрезка 2, количество отрезков вдвое меньше числа концов, т. е. равно $\dfrac{N(N-1)}{2}$. Так как в каждый цвет окрашено 3 отрезка ровно, это число должно делиться на 3. Но $\dfrac{17 \cdot 16}{2} = 136$ на 3 нацело не делится. Значит, N не может равняться 17.

г) Раскрасить 21-угольник можно, например, следующим образом. Разобъём вершины на 3 группы по 7 вершин в каждой (произвольным образом). Обозначим эти группы буквами A, B, C, и в каждой группе заиндексируем вершины натуральными числами от 1 до 7. (Т. е. группа A будет состоять из вершин A_1, A_2, …, A_7, аналогично с группами B и C.) Все отрезки с концами вершин в группе A разобъём на треугольники так, как это сделано в пункте 1, и таким же образом поступим с группами B и C. Теперь неокрашенными остались отрезки, концы которых попали в разные группы и только они. Для любого натурального числа n, не превосходящего 7, и любого целого числа i $(0 \leqslant i \leqslant 6)$ окрасим в один цвет стороны треугольника $A_n B_{n+i} C_{n+2i}$ (сложение производится по модулю 7, т. е. в качестве результата берётся не сама сумма, а её остаток от деления на 7). Заметим, что для каждого отрезка с концами в разных группах однозначно определяются параметры n и i треугольника, в который он входит. Это значит, каждый такой отрезок будет окрашен ровно в один из цветов.

Примечание. Полное решение данной задачи (определить для каких N полный граф на N вершинах можно разделить на треугольники) было предложено в XIX веке. Оказалось, что критерием является остаток от деления числа N на 6. Если этот остаток 1 или 3, то разбиение на треугольники существует. Иначе — нет. Пункты б) и в) задачи 11.5 по сути являются доказательством необходимости этого критерия.

Ответ: а), г) Да; б), в) Нет.