ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

2014 — 2015 учебный год

5 класс

1. Во время игры, которая длилась 50 минут, два запасных игрока подменяли каждого из шести основных игроков так, что все 8 игроков находились в игре одинаковое время. Какое? (В каждый момент игры в ней принимало участие ровно шестеро игроков.)

(**7 баллов.**)

2. Расшифруйте равенство

$$** + *** = ****,$$

если и сумма, и слагаемые — *числа-палиндромы* (т. е. они одинаковы при чтении справа налево или слева направо). (**7 баллов.**)

3. Ира, Таня, Коля и Лёня собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех. Докажите, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики. (**7 баллов.**)

4. Из бумаги склеили куб. Очевидно, что его поверхность можно разрезать на шесть одинаковых квадратов. А можно ли её разрезать на 12 одинаковых квадратов?

(**7 баллов.**)

5. ("Вестник опытной физики и элементарной математики", 1890 г.) В обществе из 10 членов собирали благотворительные деньги. Андрей заявил, что внесет половину того, что соберут все остальные. Виктор заявил, что внесет одну третью часть того, что внесут все остальные. Сергей заявил, что внесет одну четвертую часть того, что внесут все остальные. Оставшиеся 7 членов общества в сумме внесли 195 рублей. Сколько денег нужно собрать с Андрея, Виктора и Сергея? (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

6 класс

1. На движущемся вверх эскалаторе за то время, как Миша делает один шаг вверх на одну ступеньку, Вова делает два шага, на одну ступеньку каждый (через ступеньки никто не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, Миша сделал 21 шаг, а Вова — 28 шагов. Сколько ступенек в эскалаторе? Ответ обосновать. (**7 баллов.**)

2. Имеется несколько арбузов, веса каждого из которых не превосходят 10 кг. Известно, что каким бы образом эти арбузы не разложить на две непустые кучки, вес хотя бы одной из них будет не больше 10 кг. Каков наибольший возможный вес всех арбузов? Ответ обосновать. (**7 баллов.**)

3. Из бумаги склеили куб. Очевидно, что его поверхность можно разрезать на шесть одинаковых квадратов. А можно ли её разрезать на 12 одинаковых квадратов? (**7 баллов.**)

4. (“Вестник опытной физики и элементарной математики”, 1893 г.) Часы бьют каждые полчаса один раз и в целое число часов — столько раз, сколько часов показывает их часовая стрелка. Между моментами, когда совещание началось, и когда оно закончилось, часы сделали ровно 76 ударов. Определите сколько времени показывали часы в начале и в конце совещания, если известно, что в оба эти момента минутная стрелка указывала на цифру 1. (**7 баллов.**)

5 (“Вестник опытной физики и элементарной математики”, 1893 г.). В лесу 813 деревьев: дубы, липы, березы и сосны. Если трое примутся рубить дубы, то за это время двое срубят все липы. Если пятеро возьмутся рубить липы, то за это время шесть человек срубят все березы. Если семеро станут рубить березы, то за это время один может срубить все сосны. Сколько деревьев каждого вида в лесу? (Предполагается, что время, затрачиваемое одним лесорубом на вырубку одного дерева, не зависит от породы дерева.) (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

7 класс

1. Вчера я отпил треть стакана кофе (стакан с кофе был полон) и долил его молоком доверху; потом я выпил четверть стакана и снова долил молоком доверху; далее я отпивал последовательно 1/5, 1/6 и 1/7 стакана, и каждый раз доливал стакан доверху молоком. Сегодня я отпил 1/7 полного стакана кофе и долил его молоком доверху, затем отпил 1/6 стакана и снова долил его молоком, и так далее (т. е. 1/5, 1/4 и 1/3 стакана). В какой из дней я выпил больше чистого кофе? (**7 баллов.**)

2. В примере $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = \ldots$ каждый знак $*$ означает плюс или минус. За один ход Вовочка выбирает пару знаков, разделённых одной цифрой, и меняет знаки на противоположные.

а) Существует ли такая начальная расстановка знаков, при которой Вовочка не сможет за 1 ход сделать ответ, кратным 7? (**2 балла.**)

б) Докажите, что при любой начальной расстановке знаков Вовочка за конечное число ходов сможет сделать ответ, кратным 7. (**5 баллов.**)

3. Участок 40 м $\times$ 50 м выделен под огороды и обнесён оградой по периметру. Требуется разделить его заборами на 5 огородов (каждый огород прямоугольной формы) одинаковой площади. Это легко сделать, например, построив 4 забора, параллельных меньшей стороне участка; при этом общая длина заборов будет равна 160 м. Можно ли выполнить задание так, чтобы общая длина заборов была меньше 150 м? (**7 баллов.**)

4. Поп и Балда играют на щелбаны в следующую игру. Они, не показывая друг другу, пишут каждый по одной последовательности из 100 знаков «плюс» или «минус». Затем эти 200 знаков они выписывают по окружности в следующем порядке: первый знак — это первый знак из набора Балды, второй знак — это первый знак из набора Попа, третий знак — это второй знак из набора Балды, четвёртый знак — это второй знак из набора Попа и т. д. После этого Балда дает Попу столько щелбанов, в скольких местах плюс находится рядом с минусом. Какое наибольшее число щелбанов Балда может гарантированно поставить Попу? (**7 баллов.**)

5. В биологической лаборатории УрФУ есть несколько пятнистых хамелеонов и одна клетка. Если трёх пятнистых хамелеонов посадить на один час в эту клетку, то количество пятен на каждом из них станет одинаковым, причём таким, каким было до этого у среднего из них по числу пятен. За какое наименьшее количество часов можно гарантировано добиться того, чтобы у всех имеющихся хамелеонов количество пятен стало одинаковым? (Предполагается, что вне клетки хамелеоны не меняют количество пятен.) Решите задачу, если всего имеется

а) 4 пятнистых хамелеона; (**3 балла.**)

б) 5 пятнистых хамелеонов; (**4 балла.**)

в) 100 пятнистых хамелеонов. (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

8 класс

1. Каждое из чисел $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ равно $+1$ или -1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$AEK - AFH + BFG - BDK + CDH - CEG?$$

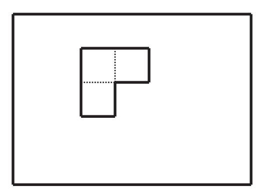
(**7 баллов.**)

2. Чингачгук хочет прорубить томагавком отверстие в стене. Брошенный им томагавк оставляет в стене трещину в виде отрезка длиной 20 см с серединой в точке, выбранной Чингачгуком перед броском. Но, к сожалению, направление отрезка возникает случайным образом. Известно, что направления трещин (т.е. отрезков) никогда не повторяются. Верно ли, что Чингачгуку всегда хватит пяти бросков, если его устроит дыра в стене любой ненулевой площади? (**7 баллов.**)

3. Разность между шестизначным числом $\overline{abcdef}$ и числом $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$. (**7 баллов.**)

4. На продолжении стороны MA квадрата $MABO$ за точку A отметили точку C. Окружность с центром в точке O радиуса OB пересекает прямую BC в двух точках B и N. Докажите, что длина отрезка BN равна удвоенной длине высоты, опущенной на сторону BC в треугольнике ABC.

5. В каждой клетке прямоугольника, нарисованного по линиям клетчатого листа бумаги, записано число. Известно, что сумма трёх чисел в каждом как угодно повернутом внутри прямоугольника трёхклеточном уголке (см. рисунок) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем прямоугольнике также положительна?



К условию задачи 5

Решите задачу, если прямоугольник имеет следующие размеры:

а) 5 х 9 клеток; (**1 балл.**)
б) 2 х 4 клетки; (**4 балла.**)
в) 5 х 5 клеток; (**5 баллов.**)
г) 7 х 7 клеток. (**4 балла.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

2014 — 2015 учебный год

9 класс

1. Куб с целочисленной стороной удалось без остатка распилить на один куб меньшего размера, но также с целочисленной стороной, и 386 кубиков со стороной 1. Найдите длину стороны исходного куба. (**7 баллов.**)

2. В треугольнике провели прямую l через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности (предполагается, что эти точки не совпадают). Докажите, что прямая l параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда длины сторон треугольника, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию (т. е. средняя из них равна полусумме двух оставшихся). (**7 баллов.**)

3. Каждая из нескольких книг стоит одно и то же целое число центов. Известно, что девять таких книг стоят меньше m евро (m — целое число), а десять книг стоят больше, чем $m+1$ евро. При каких значениях m по этим данным можно однозначно определить стоимость одной книги? (В одном евро 100 центов.) Ответ обосновать.

(**7 баллов.**)

4. Знайка собирается отметить на координатной плоскости 25 точек общего положения (т. е. никакие три точки не лежат на одной прямой), обе координаты которых целочисленны. После этого ему нужно будет провести все возможные отрезки с концами в отмеченных точках, середина которых также имеет целочисленные координаты. Какое наименьшее число отрезков придётся провести Знайке?

(**7 баллов.**)

5. Каждую вершину правильного N-угольника покрасили в один из двух цветов. Обязательно ли найдётся равнобедренный треугольник, все вершины которого окрашены в один цвет?

Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 6$; (**1 балл.**)

б) $N = 2015$; (**2 балла.**)

в) $N = 8$; (**3 балла.**)

г) $N = 10$; (**4 балла.**)

д) $N = 2016$. (**4 балла.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

10 класс

1. Целые числа x, y и z таковы, что $xy + yz + zx = 1$ Докажите, что число

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$$

является квадратом целого числа. (**7 баллов.**)

2. На плоскости даны правильный треугольник $A_1A_2A_3$ (нумерация вершин треугольника против часовой стрелки) и точка P, не лежащая на прямой A_1A_3. Точку P повернули на $60°$ вокруг точки A_1, полученную точку P' — на $60°$ вокруг точки A_2, новую точку P'' — на $60°$ вокруг точки A_3 в точку Q (все три поворота осуществлялись по часовой стрелке). Докажите, что четырёхугольник A_1QA_3P — параллелограмм.

3. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

(**7 баллов.**)

4. Барон Мюнхгаузен однажды участвовал в сражении между тремя армиями: красных, синих и зеленых. Армии обстреливали друг друга пушечными ядрами. При этом в армии красных не хватало пушек, поэтому они по синим не стреляли (а синие и зеленые стреляли по обеим вражеским армиям). Барон служил в армии красных и каждый день на ядрах летал на разведку. Он садился на ядро, выпускаемое красными, летел на позицию зелёных, пересаживался на ядро, выпущенное зелёными, и летел на нём до позиции армии, по которой оно было выпущено, затем пересаживался на ядро, выпущенное той армией, и летел до следующей армии, где вновь пересаживался и т.д. Каждый день барон путешествовал ровно на 10 ядрах, и с последним из них возвращался на позицию красных. Известно, что ни в один из дней барон не повторил свой маршрут, но все возможные маршруты им были пройдены. (Под маршрутом понимается последовательность армий, которые посетил барон за день, летая на ядрах, например КЗСКЗСКЗСЗК — по первым буквам названий армий.) Сколько дней длилось сражение? (**7 баллов.**)

5. Дан правильный n-угольник ($n \geqslant 3$). Требуется расставить натуральные числа от 1 до n в его вершины, а натуральные числа от $n+1$ до $2n$ в середины его сторон (по одному числу в вершину и по одному — в середину каждой из сторон) так, чтобы все суммы трёх чисел, лежащих на каждой из сторон n-угольника, были равны.

1) Существует ли такая расстановка для $n = 5$? (**1 балл.**)
2) Существует ли такая расстановка для $n = 4$? (**3 балла.**)
3) Приведите пример требуемой расстановки для $n = 13$. (**3 балла.**)
4) Найдите все натуральные n, для которых задача имеет решение. (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

11 класс

1. Вычислите сумму

$$(a+b)+(a^2+ab+b^2)+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n).$$

(Здесь a и b — различные действительные числа.) (**7 баллов.**)

2. Через точку M внутри шара радиуса R на расстоянии a от его центра проведены три взаимно перпендикулярные плоскости. Определите сумму площадей кругов, полученных при пересечении шара этими плоскостями. (**7 баллов.**)

3. Решите уравнение $x^3-px+\sqrt{p-1}=0$. (p — параметр.) (**7 баллов.**)

4. В остроугольном треугольнике ABC выполняется $\angle B=60^\circ$. Прямая l проходит через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC (предполагается, что эти точки не совпадают). При этом l пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBN равносторонний. (**4 балла.**)

б) Найдите MN, если $AB=c$ и $BC=a$. (**3 балла.**)

5. Дед Мороз составляет подарки из конфет, имея в распоряжении конфеты 11 различных сортов (конфет каждого сорта неограниченно много). Требуется, чтобы в каждом подарке все конфеты имели разные сорта. Готовые подарки Дед Мороз складывает в мешок.

Считается, что подарок А хуже подарка Б, если подарок А может быть получен из подарка Б удалением нескольких (не менее, чем одной) конфет. Дед Мороз собирает мешок подарков таким образом, чтобы все подарки в мешке были различными, и чтоб ни один подарок в мешке не был хуже никакого другого.

А) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не больше 3 конфет. Докажите, что он сможет собрать другой мешок, в котором подарков столько же, но при этом в каждом подарке будет не меньше 8 конфет. (**1 балл.**)

Б) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не меньше 1 и не больше 2 конфет. Докажите, что он сможет собрать ещё один мешок, в котором подарков столько же или больше, и в каждом подарке из которого ровно 2 конфеты. (**2 балла.**)

В) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не меньше 3 и не больше 4 конфет. Докажите, что он сможет собрать ещё один мешок, в котором подарков столько же или больше, и в каждом подарке из которого ровно 4 конфеты. (**5 баллов.**)

Г) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого ровно 5 конфет, при этом каждая возможная комбинация из 5 различных сортов конфет встречается ровно по одному разу (таким образом, в мешке $C_{11}^5=462$ подарка). Докажите, что собрать мешок с большим количеством подарков невозможно. (**6 баллов.**)