ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

5 класс

1. Во время игры, которая длилась 50 минут, два запасных игрока подменяли каждого из шести основных игроков так, что все 8 игроков находились в игре одинаковое время. Какое? (В каждый момент игры в ней принимало участие ровно шестеро игроков.)

(**7 баллов.**)

2. Расшифруйте равенство

$$** + *** = ****,$$

если и сумма, и слагаемые — *числа-палиндромы* (т. е. они одинаковы при чтении справа налево или слева направо). (**7 баллов.**)

3. Ира, Таня, Коля и Лёня собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех. Докажите, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики. (**7 баллов.**)

4. Из бумаги склеили куб. Очевидно, что его поверхность можно разрезать на шесть одинаковых квадратов. А можно ли её разрезать на 12 одинаковых квадратов?

(**7 баллов.**)

5. (“Вестник опытной физики и элементарной математики”, 1890 г.) В обществе из 10 членов собирали благотворительные деньги. Андрей заявил, что внесет половину того, что соберут все остальные. Виктор заявил, что внесет одну третью часть того, что внесут все остальные. Сергей заявил, что внесет одну четвертую часть того, что внесут все остальные. Оставшиеся 7 членов общества в сумме внесли 195 рублей. Сколько денег нужно собрать с Андрея, Виктора и Сергея? (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

6 класс

1. На движущемся вверх эскалаторе за то время, как Миша делает один шаг вверх на одну ступеньку, Вова делает два шага, на одну ступеньку каждый (через ступеньки никто не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, Миша сделал 21 шаг, а Вова — 28 шагов. Сколько ступенек в эскалаторе? Ответ обосновать. (**7 баллов.**)

2. Имеется несколько арбузов, веса каждого из которых не превосходят 10 кг. Известно, что каким бы образом эти арбузы не разложить на две непустые кучки, вес хотя бы одной из них будет не больше 10 кг. Каков наибольший возможный вес всех арбузов? Ответ обосновать. (**7 баллов.**)

3. Из бумаги склеили куб. Очевидно, что его поверхность можно разрезать на шесть одинаковых квадратов. А можно ли её разрезать на 12 одинаковых квадратов? (**7 баллов.**)

4. ("Вестник опытной физики и элементарной математики", 1893 г.) Часы бьют каждые полчаса один раз и в целое число часов — столько раз, сколько часов показывает их часовая стрелка. Между моментами, когда совещание началось, и когда оно закончилось, часы сделали ровно 76 ударов. Определите сколько времени показывали часы в начале и в конце совещания, если известно, что в оба эти момента минутная стрелка указывала на цифру 1. (**7 баллов.**)

5 ("Вестник опытной физики и элементарной математики", 1893 г.). В лесу 813 деревьев: дубы, липы, березы и сосны. Если трое примутся рубить дубы, то за это время двое срубят все липы. Если пятеро возьмутся рубить липы, то за это время шесть человек срубят все березы. Если семеро станут рубить березы, то за это время один может срубить все сосны. Сколько деревьев каждого вида в лесу? (Предполагается, что время, затрачиваемое одним лесорубом на вырубку одного дерева, не зависит от породы дерева.) (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

7 класс

1. Вчера я отпил треть стакана кофе (стакан с кофе был полон) и долил его молоком доверху; потом я выпил четверть стакана и снова долил молоком доверху; далее я отпивал последовательно 1/5, 1/6 и 1/7 стакана, и каждый раз доливал стакан доверху молоком. Сегодня я отпил 1/7 полного стакана кофе и долил его молоком доверху, затем отпил 1/6 стакана и снова долил его молоком, и так далее (т. е. 1/5, 1/4 и 1/3 стакана). В какой из дней я выпил больше чистого кофе? (**7 баллов.**)

2. В примере $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = \ldots$ каждый знак $*$ означает плюс или минус. За один ход Вовочка выбирает пару знаков, разделённых одной цифрой, и меняет знаки на противоположные.

а) Существует ли такая начальная расстановка знаков, при которой Вовочка не сможет за 1 ход сделать ответ, кратным 7? (**2 балла.**)

б) Докажите, что при любой начальной расстановке знаков Вовочка за конечное число ходов сможет сделать ответ, кратным 7. (**5 баллов.**)

3. Участок 40 м $\times$ 50 м выделен под огороды и обнесён оградой по периметру. Требуется разделить его заборами на 5 огородов (каждый огород прямоугольной формы) одинаковой площади. Это легко сделать, например, построив 4 забора, параллельных меньшей стороне участка; при этом общая длина заборов будет равна 160 м. Можно ли выполнить задание так, чтобы общая длина заборов была меньше 150 м? (**7 баллов.**)

4. Поп и Балда играют на щелбаны в следующую игру. Они, не показывая друг другу, пишут каждый по одной последовательности из 100 знаков «плюс» или «минус». Затем эти 200 знаков они выписывают по окружности в следующем порядке: первый знак — это первый знак из набора Балды, второй знак — это первый знак из набора Попа, третий знак — это второй знак из набора Балды, четвёртый знак — это второй знак из набора Попа и т. д. После этого Балда дает Попу столько щелбанов, в скольких местах плюс находится рядом с минусом. Какое наибольшее число щелбанов Балда может гарантированно поставить Попу? (**7 баллов.**)

5. В биологической лаборатории УрФУ есть несколько пятнистых хамелеонов и одна клетка. Если трёх пятнистых хамелеонов посадить на один час в эту клетку, то количество пятен на каждом из них станет одинаковым, причём таким, каким было до этого у среднего из них по числу пятен. За какое наименьшее количество часов можно гарантировано добиться того, чтобы у всех имеющихся хамелеонов количество пятен стало одинаковым? (Предполагается, что вне клетки хамелеоны не меняют количество пятен.) Решите задачу, если всего имеется

а) 4 пятнистых хамелеона; (**3 балла.**)

б) 5 пятнистых хамелеонов; (**4 балла.**)

в) 100 пятнистых хамелеонов. (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

8 класс

1. Каждое из чисел $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ равно $+1$ или -1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$AEK - AFH + BFG - BDK + CDH - CEG?$$

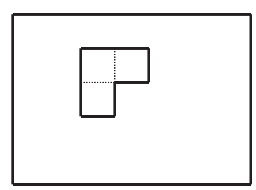
(**7 баллов.**)

2. Чингачгук хочет прорубить томагавком отверстие в стене. Брошенный им томагавк оставляет в стене трещину в виде отрезка длиной 20 см с серединой в точке, выбранной Чингачгуком перед броском. Но, к сожалению, направление отрезка возникает случайным образом. Известно, что направления трещин (т.е. отрезков) никогда не повторяются. Верно ли, что Чингачгуку всегда хватит пяти бросков, если его устроит дыра в стене любой ненулевой площади? (**7 баллов.**)

3. Разность между шестизначным числом $\overline{abcdef}$ и числом $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$. (**7 баллов.**)

4. На продолжении стороны MA квадрата $MABO$ за точку A отметили точку C. Окружность с центром в точке O радиуса OB пересекает прямую BC в двух точках B и N. Докажите, что длина отрезка BN равна удвоенной длине высоты, опущенной на сторону BC в треугольнике ABC.

5. В каждой клетке прямоугольника, нарисованного по линиям клетчатого листа бумаги, записано число. Известно, что сумма трёх чисел в каждом как угодно повернутом внутри прямоугольника трёхклеточном уголке (см. рисунок) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем прямоугольнике также положительна?



К условию задачи 5

Решите задачу, если прямоугольник имеет следующие размеры:

а) 5 x 9 клеток; (**1 балл.**)

б) 2 x 4 клетки; (**4 балла.**)

в) 5 x 5 клеток; (**5 баллов.**)

г) 7 x 7 клеток. (**4 балла.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

9 класс

1. Куб с целочисленной стороной удалось без остатка распилить на один куб меньшего размера, но также с целочисленной стороной, и 386 кубиков со стороной 1. Найдите длину стороны исходного куба. **(7 баллов.)**

2. В треугольнике провели прямую l через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности (предполагается, что эти точки не совпадают). Докажите, что прямая l параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда длины сторон треугольника, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию (т. е. средняя из них равна полусумме двух оставшихся). **(7 баллов.)**

3. Каждая из нескольких книг стоит одно и то же целое число центов. Известно, что девять таких книг стоят меньше m евро (m — целое число), а десять книг стоят больше, чем $m+1$ евро. При каких значениях m по этим данным можно однозначно определить стоимость одной книги? (В одном евро 100 центов.) Ответ обосновать.

(7 баллов.)

4. Знайка собирается отметить на координатной плоскости 25 точек общего положения (т. е. никакие три точки не лежат на одной прямой), обе координаты которых целочисленны. После этого ему нужно будет провести все возможные отрезки с концами в отмеченных точках, середина которых также имеет целочисленные координаты. Какое наименьшее число отрезков придётся провести Знайке?

(7 баллов.)

5. Каждую вершину правильного N-угольника покрасили в один из двух цветов. Обязательно ли найдётся равнобедренный треугольник, все вершины которого окрашены в один цвет?

Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 6$; **(1 балл.)**

б) $N = 2015$; **(2 балла.)**

в) $N = 8$; **(3 балла.)**

г) $N = 10$; **(4 балла.)**

д) $N = 2016$. **(4 балла.)**

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

10 класс

1. Целые числа x, y и z таковы, что $xy + yz + zx = 1$ Докажите, что число

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$$

является квадратом целого числа. (**7 баллов.**)

2. На плоскости даны правильный треугольник $A_1A_2A_3$ (нумерация вершин треугольника против часовой стрелки) и точка P, не лежащая на прямой A_1A_3. Точку P повернули на $60°$ вокруг точки A_1, полученную точку P' — на $60°$ вокруг точки A_2, новую точку P'' — на $60°$ вокруг точки A_3 в точку Q (все три поворота осуществлялись по часовой стрелке). Докажите, что четырёхугольник A_1QA_3P — параллелограмм.

3. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$ (**7 баллов.**)

4. Барон Мюнхгаузен однажды участвовал в сражении между тремя армиями: красных, синих и зеленых. Армии обстреливали друг друга пушечными ядрами. При этом в армии красных не хватало пушек, поэтому они по синим не стреляли (а синие и зеленые стреляли по обеим вражеским армиям). Барон служил в армии красных и каждый день на ядрах летал на разведку. Он садился на ядро, выпускаемое красными, летел на позицию зелёных, пересаживался на ядро, выпущенное зелёными, и летел на нём до позиции армии, по которой оно было выпущено, затем пересаживался на ядро, выпущенное той армией, и летел до следующей армии, где вновь пересаживался и т.д. Каждый день барон путешествовал ровно на 10 ядрах, и с последним из них возвращался на позицию красных. Известно, что ни в один из дней барон не повторил свой маршрут, но все возможные маршруты им были пройдены. (Под маршрутом понимается последовательность армий, которые посетил барон за день, летая на ядрах, например КЗСКЗСКЗСЗК — по первым буквам названий армий.) Сколько дней длилось сражение? (**7 баллов.**)

5. Дан правильный n-угольник ($n \geqslant 3$). Требуется расставить натуральные числа от 1 до n в его вершины, а натуральные числа от $n+1$ до $2n$ в середины его сторон (по одному числу в вершину и по одному — в середину каждой из сторон) так, чтобы все суммы трёх чисел, лежащих на каждой из сторон n-угольника, были равны.

1) Существует ли такая расстановка для $n = 5$? (**1 балл.**)
2) Существует ли такая расстановка для $n = 4$? (**3 балла.**)
3) Приведите пример требуемой расстановки для $n = 13$. (**3 балла.**)
4) Найдите все натуральные n, для которых задача имеет решение. (**7 баллов.**)

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

2014 — 2015 учебный год

11 класс

1. Вычислите сумму

$$(a+b)+(a^2+ab+b^2)+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n).$$

(Здесь a и b — различные действительные числа.) (**7 баллов.**)

2. Через точку M внутри шара радиуса R на расстоянии a от его центра проведены три взаимно перпендикулярные плоскости. Определите сумму площадей кругов, полученных при пересечении шара этими плоскостями. (**7 баллов.**)

3. Решите уравнение $x^3-px+\sqrt{p-1}=0$. (p — параметр.) (**7 баллов.**)

4. В остроугольном треугольнике ABC выполняется $\angle B=60^\circ$. Прямая l проходит через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC (предполагается, что эти точки не совпадают). При этом l пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBN равносторонний. (**4 балла.**)

б) Найдите MN, если $AB=c$ и $BC=a$. (**3 балла.**)

5. Дед Мороз составляет подарки из конфет, имея в распоряжении конфеты 11 различных сортов (конфет каждого сорта неограниченно много). Требуется, чтобы в каждом подарке все конфеты имели разные сорта. Готовые подарки Дед Мороз складывает в мешок.

Считается, что подарок А хуже подарка Б, если подарок А может быть получен из подарка Б удалением нескольких (не менее, чем одной) конфет. Дед Мороз собирает мешок подарков таким образом, чтобы все подарки в мешке были различными, и чтоб ни один подарок в мешке не был хуже никакого другого.

А) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не больше 3 конфет. Докажите, что он сможет собрать другой мешок, в котором подарков столько же, но при этом в каждом подарке будет не меньше 8 конфет. (**1 балл.**)

Б) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не меньше 1 и не больше 2 конфет. Докажите, что он сможет собрать ещё один мешок, в котором подарков столько же или больше, и в каждом подарке из которого ровно 2 конфеты. (**2 балла.**)

В) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не меньше 3 и не больше 4 конфет. Докажите, что он сможет собрать ещё один мешок, в котором подарков столько же или больше, и в каждом подарке из которого ровно 4 конфеты. (**5 баллов.**)

Г) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого ровно 5 конфет, при этом каждая возможная комбинация из 5 различных сортов конфет встречается ровно по одному разу (таким образом, в мешке $C_{11}^5=462$ подарка). Докажите, что собрать мешок с большим количеством подарков невозможно. (**6 баллов.**)

РЕШЕНИЯ
5 класс

1. *Во время игры, которая длилась* 50 *минут, два запасных игрока подменяли каждого из шести основных игроков так, что все* 8 *игроков находились в игре одинаковое время. Какое? (В каждый момент игры в ней принимало участие ровно шестеро игроков.)*

Решение. Давайте считать, что игроки играют не одновременно, а по очереди. Тогда игра будет длиться в 6 раз дольше (300 минут) и каждый из 8 игроков проведёт в игре одинаковое время, равное $300 : 8 = 37,5$ минут. Это и есть ответ.

Ответ. $37,5$ минут (или 37 минут 30 секунд).

2. *Расшифруйте равенство*

$$** + *** = ****,$$

если и сумма, и слагаемые — числа-палиндромы (т. е. они одинаковы при чтении справа налево или слева направо).

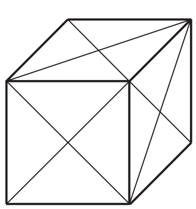
Решение. Первая цифра второго слагаемого может быть только 9, так как в противном случае в сумме не получить четырёхзначного числа. Первая цифра суммы равна 1, так как сумма трёхзначного и двузначного числа меньше 2000. Так как все числа палиндромы, последняя цифра суммы равна 1, а последняя цифра второго слагаемого 9. Тогда первое число равно 22. Вторая цифра суммы равна 0, так как получена из 9 добавлением 1 (перенос из предыдущего разряда). Значит, сумма равна 1001, а второе слагаемое $1001 - 22 = 979$.

Ответ. $22 + 979 = 1001$.

3. *Ира, Таня, Коля и Лёня собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех. Докажите, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики.*

Решение. Ира собрала не меньше всех, Таня больше, чем Ира, поэтому худший грибник из мальчиков собрал не больше Иры. А второй мальчик собрал меньше Тани. Таким образом, мальчики вдвоём собрали меньше грибов, чем Таня с Ирой и утверждение задачи доказано.

4. *Из бумаги склеили куб. Очевидно, что его поверхность можно разрезать на шесть одинаковых квадратов. А можно ли её разрезать на* 12 *одинаковых квадратов?*



К решению задачи 4
(5 класс)

Решение. Можно. Надо разрезать каждую грань по диагоналям, тогда поверхность распадётся на 12 квадратов, согнутых вдоль диагонали — ребра куба (см. рисунок).

Ответ. Можно.

5 („Вестник опытной физики и элементарной математики“, 1890 г.) *В обществе из* 10 *членов собирали благотворительные деньги. Андрей* *заявил, что внесет половину того, что соберут все остальные. Виктор заявил, что внесет одну третью часть того, что внесут все остальные. Сергей заявил, что внесет одну четвертую часть того, что внесут все остальные. Оставшиеся 7 членов общества в сумме внесли 195 рублей. Сколько денег нужно собрать с Андрея, Виктора и Сергея?*

Решение. Пусть все, кроме Андрея, внесли в сумме $2x$ рублей. Тогда Андрей, согласно своему заявлению, должен внести x рублей, и общая сумма составит $3x$ рублей. Заявление Андрея, таким образом, означает ровно то, что он внесёт треть всех денег. Аналогично, Виктор желает внести четверть всех денег, а Сергей — пятую часть. Втроём они собрались внести $1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60$ всех денег. Остальную часть суммы $(1 - 47/60 = 13/60)$ составили 195 рублей. Значит, вся сумма должна составить 900 рублей. Это значит, что Андрей вносит $900 \cdot 1/3 = 300$ рублей, Виктор — $900 \cdot 1/4 = 225$ рублей и Сергей — $900 \cdot 1/5 = 180$ рублей.

Ответ. С Андрея, Виктора и Сергея нужно взять соответственно 300, 225 и 180 рублей.

6 класс

1. *На движущемся вверх эскалаторе за то время, как Миша делает один шаг вверх на одну ступеньку, Вова делает два шага, на одну ступеньку каждый (через ступеньки никто не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, Миша сделал 21 шаг, а Вова — 28 шагов. Сколько ступенек в эскалаторе? Ответ обосновать.*

Решение. Первый способ. Будем считать, что мальчики стали подниматься по эскалатору одновременно и рассмотрим положение, когда Вова закончил подъём. Так как Миша шагает в два раза медленнее, он к этому времени сделал 14 шагов, и отстаёт от Вовы на 14 ступенек. На преодоление этих самых ступенек ему понадобилось $21 - 14 = 7$ шагов, за которые он прошагал 7 ступенек, а на остальные $14 - 7 = 7$ его поднял эскалатор. Тогда эскалатор поднимает его на столько же ступенек, сколько он прошагает сам. За весь подъём Миша прошагал 21 ступеньку, значит, в эскалаторе 42 ступеньки.

Второй способ. Пусть за то время, за которое Миша делает шаг, а Вова два, эскалатор поднимается на a ступенек. Тогда общая длина эскалатора (в ступеньках) с одной стороны равна $21(a+1)$, с другой — $\frac{28}{2}a + 28$. Приравнивая эти величины, получаем, что $a = 1$, и тогда длина эскалатора 42 ступеньки.

Ответ. 42 ступеньки.

2. *Имеется несколько арбузов, веса каждого из которых не превосходят* 10 *кг. Известно, что каким бы образом эти арбузы не разложить на две непустые кучки, вес хотя бы одной из них будет не больше* 10 *кг. Каков наибольший возможный вес всех арбузов? Ответ обосновать.*

Решение. Набор из трёх арбузов весами по 10 кг каждый удовлетворяет условию, так как в какой-то кучке будет не более одного арбуза. Пусть сумма масс арбузов больше 30 кг. Покажем, как их разложить в две кучки, чтобы в каждой оказалось больше 10 кг веса. Сперва наберём первую кучку. Будем класть в неё арбузы по одному (порядок любой) до тех пор, пока вес кучки не превзойдёт 10 кг. Как только это случится, будем считать первую кучку сформированной и остальные арбузы отнесём ко второй кучке. Заметим, что в первой кучке больше 10 кг, но не больше 20 кг, поскольку перед тем, как в неё добавили последний арбуз, её вес не превосходил 10 кг, и вес этого арбуза тоже был не больше 10 кг. Так как общий вес всех арбузов больше 30 кг, то вес второй кучки также больше 10 кг.

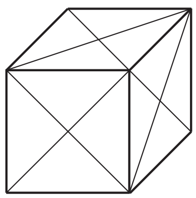
Ответ. 30 кг.

3. *Из бумаги склеили куб. Очевидно, что его поверхность можно разрезать на шесть одинаковых квадратов. А можно ли её разрезать на* 12 *одинаковых квадратов?* [

Решение. Можно. Надо разрезать каждую грань по диагоналям, тогда поверхность распадётся на 12 квадратов, согнутых вдоль диагонали — ребра куба (см. рисунок).

Ответ. Можно.

4 (“Вестник опытной физики и элементарной математики”, 1893 г). *Часы бьют каждые полчаса один раз и в целое число часов — столько раз, сколько часов показывает их часовая стрелка. Между моментами, когда совещание началось, и когда* *оно закончилось, часы сделали ровно 76 ударов. Определите сколько времени показывали часы в начале и в конце совещания, если известно, что в оба эти момента минутная стрелка указывала на цифру 1.*



К решению задачи 3 (6 класс)

Решение. За 12 часов часы пробьют $(1+2+\ldots+12)+12=90$ раз. Значит, с момента окончания заседания до того момента, когда стрелки окажутся в том же положении, что и в начале будет сделано ровно 14 ударов. Совещание шло целое число часов, поэтому эти 14 ударов тоже будут сделаны за целое число часов, пусть за n. За один час часы сделают не больше $12+1$ удара, поэтому $n \neq 1$. При $n=2$ часы делают два удара в получасовые промежутки и 12 ударов в целое число часов. Но эти часы имеют разную чётность, поэтому число ударов часов за 2 часа нечётно. Значит, $n \neq 2$. При $n=3$ часы делают 3 удара в получасовые промежутки и 11 ударов в целое число часов. Но сумма любых трёх последовательных чисел на циферблате кратна 3, а 11 на 3 не делится — снова противоречие. При $n=4$ выясняем, что часы пробили в целое число часов 10 раз ровно. Число 10 представляется единственным образом в виде суммы четырёх чисел $10=1+2+3+4$. Это означает, что совещание началось в 4 часа 5 минут и завершилось через 8 часов в 12 час 5 минут по показанию часов. Наконец, если $n>4$, то часы сделают больше, чем $4+(1+2+3+4)=14$ ударов. Это не соответствует условию.

Ответ. В начале совещания часы показывали 5 минут пятого, в конце — 5 минут первого.

5 (“Вестник опытной физики и элементарной математики”, 1893 г.). *В лесу 813 деревьев: дубы, липы, берёзы и сосны. Если трое примутся рубить дубы, то за это время двое срубят все липы. Если пятеро возьмутся рубить липы, то за это время шесть человек срубят все берёзы. Если семеро станут рубить берёзы, то за это время один может срубить все сосны. Сколько деревьев каждого вида в лесу? (Предполагается, что время, затрачиваемое одним лесорубом на вырубку одного дерева, не зависит от породы дерева.)*

Решение. Пусть d, l, b и s — соответственно количества дубов, лип, берёз и сосен. По условию $d+l+b+s=813$. Утверждение, что пока трое рубят дубы, двое срубят все липы означает, что $d/3=l/2$. Аналогично выполняются равенства $l/5=b/6$ и $b/7=s$. Выразим все неизвестные через одну, например, через b. Имеем $s=b/7$, $l=5b/6$ и $d=3l/2=5b/4$. Тогда $\frac{5}{4}b+\frac{5}{6}b+b+\frac{1}{7}b=813$, откуда $b=252$. Тогда $s=36$, $l=210$ и $d=315$.

Ответ. 252 берёзы, 36 сосен, 210 лип и 315 дубов.

7 класс

1. *Вчера я отпил треть стакана кофе (стакан с кофе был полон) и долил его молоком доверху; потом я выпил четверть стакана и снова долил молоком доверху; далее я отпивал последовательно $1/5$, $1/6$ и $1/7$ стакана, и каждый раз доливал стакан доверху молоком. Сегодня я отпил $1/7$ полного стакана кофе и долил его молоком доверху, затем отпил $1/6$ стакана и снова долил его молоком, и так далее (т. е. $1/5$, $1/4$ и $1/3$ стакана). В какой из дней я выпил больше чистого кофе?*

Решение. Первый способ. Подсчитаем количество кофе, которое осталось не выпитым в каждый из дней. Вчера: когда я выпил $1/3$ стакана кофе, осталось $2/3$ стакана. Затем я выпил $1/4 \cdot 2/3 = 1/6$, кофе осталось $2/3 - 1/6 = 1/2$ стакана. Потом я выпил $1/2 \cdot 1/5 = 1/10$, осталось $1/2 - 1/10 = 2/5$. Дальнейший счёт аналогичен, результат занесём в таблицу.

ВЧЕРА

Было	Выпито	Осталось
1	$1/3$	$2/3$
$2/3$	$1/4 \cdot 2/3 = 1/6$	$2/3 - 1/6 = 1/2$
$1/2$	$1/5 \cdot 1/2 = 1/10$	$1/2 - 1/10 = 2/5$
$2/5$	$1/6 \cdot 2/5 = 1/15$	$2/5 - 1/15 = 1/3$
$1/3$	$1/7 \cdot 1/3 = 1/21$	$1/3 - 1/21 = 2/7$

Итого, вчера не выпитым осталось $2/7$ стакана кофе.

Аналогичный таблица для сегодняшнего дня такова.

СЕГОДНЯ

Было	Выпито	Осталось
1	$1/7$	$6/7$
$6/7$	$1/6 \cdot 6/7 = 1/7$	$6/7 - 1/7 = 5/7$
$5/7$	$1/5 \cdot 5/7 = 1/7$	$5/7 - 1/7 = 4/7$
$4/7$	$1/4 \cdot 4/7 = 1/7$	$5/7 - 4/7 = 3/7$
$3/7$	$1/3 \cdot 3/7 = 1/7$	$3/7 - 1/7 = 2/7$

Таким образом и вчера, и сегодня осталось одно и то же количество кофе. Значит, в оба дня я кофе выпил одинаковое количество.

Второй способ. Покажем, что количество выпитого кофе не зависит от порядка, в котором выпивались дозы кофе; для этого достаточно показать, что результат не изменится, если мы поменяем количество выпитой жидкости в любых двух последовательных этапах.

Итак, пусть в какой-то момент в стакане осталось m единиц собственно кофе, а остальные $1 - m$ единиц составляло молоко. Пусть сперва я выпью α частей стакана, долью стакан молоком и затем выпью β единиц. Тогда я сначала выпил $\alpha \cdot m$ стаканов кофе, осталось $m - \alpha \cdot m = m(1 - \alpha)$, а затем — $\beta \cdot m(1 - \alpha)$. В стакане останется $m(1 - \alpha) - \beta \cdot m(1 - \alpha) = m(1 - \alpha)(1 - \beta)$. Как видно, результат не зависит от порядка α и β, что и завершает доказательство.

Примечание. Из доказательства, кстати, сразу видно какое количество кофе останется недопитым: $(1 - 1/3) \cdot (1 - 1/4) \cdot (1 - 1/5) \cdot (1 - 1/6) \cdot (1 - 1/7)$ стакана.

Ответ. В оба дня поровну.

2. *В примере $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = \ldots$ каждый знак $*$ означает плюс или минус. За один ход Вовочка выбирает пару знаков, разделённых одной цифрой, и меняет знаки на противоположные.*

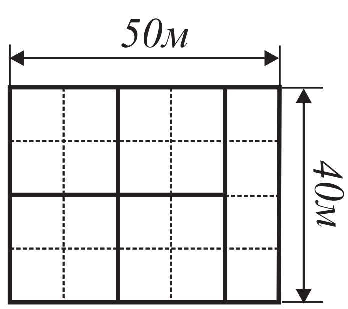
а) Существует ли такая начальная расстановка знаков, при которой Вовочка не сможет за 1 ход сделать ответ, кратным 7?

б) Докажите, что при любой начальной расстановке знаков Вовочка за конечное число ходов сможет сделать ответ, кратным 7.

Решение. а) Существует. Например, такая: $1+2+3+4+5-6$. Сумма равна 9, на 7 не делится. Мы можем получить 4 числа: $1+2+3+4-5+6 = 11$, $1+2+3-4-5-6 = -9$, $1+2-3-4+5-6 = -5$, $1-2-3+4+5+6 = 11$ — на 7 ни одно число не делится.

б) Последовательно меняя или не меняя знаки, окружающие цифру 2, затем цифры 3, 4 и 5, добьёмся, примера вида $1+2+3+4+5*6$. Если на месте $*$ стоит знак $+$, сумма равна 21 и мы достигли цели. Если на месте $*$ стоит знак $-$, то поменяем местами знаки сперва вокруг цифры 4, потом вокруг цифры 3 и получим $1+2-3+4-5-6 = -7$.

Ответ. а) Существует.



К решению задачи 3
(7 класс)

3. *Участок 40 м$\times$50 м выделен под огороды и обнесён оградой по периметру. Требуется разделить его заборами на 5 огородов (каждый огород прямоугольной формы) одинаковой площади. Это легко сделать, например, построив 4 забора, параллельных меньшей стороне участка; при этом общая длина заборов будет равна 160 м. Можно ли выполнить задание так, чтобы общая длина заборов была меньше 150 м?*

Решение. Заметим, что сумма периметров всех огородов равна периметру всего участка плюс удвоенная суммарная длина заборов. Отсюда общая длина всех заборов равна $\dfrac{P-2(40+50)}{2}$, где P — сумма периметров огородов. Поэтому наша цель сделать P меньшим 480 м. Каждый огород есть прямоугольник площади $\dfrac{40 \cdot 50}{5} = 400$ квадратных метров. Наиболее естественно рассматривать огороды с целочисленными сторонами, т. е. размерами 8×50, 10×40, 16×25, 20×20 (огороды других целочисленных размеров не поместятся на участок). Периметр огородов первого типа равен 116, второго — 100, третьего — 82 и четвёртого — 80. Как видно, чем более вытянут участок, тем больше его периметр (эту закономерность легко доказать в общем виде — классическая школьная задача на 10 — 11 класс). Минимальный периметр (400 м) дают 5 квадратных огородов. Увы, разрезать участок на 5 равных квадратов нельзя. Однако нас вполне устроит ситуация при которой 4 огорода квадратные, а пятый — прямоугольник 10×50 (в этом случае сумма периметров 420). Такое разделение строится очевидно (см. рисунок).

Ответ. Можно (см. пример).

4. *Поп и Балда играют на щелбаны в следующую игру. Они, не показывая друг другу, пишут каждый по одной последовательности из* 100 *знаков «плюс» или «минус». Затем эти* 200 *знаков они выписывают по окружности в следующем порядке: первый знак — это первый знак из набора Балды, второй знак — это первый знак из набора Попа, третий знак — это второй знак из набора Балды, четвёртый знак — это второй знак из набора Попа и т. д. После этого Балда дает Попу столько щелбанов, в скольких местах плюс находится рядом с минусом. Какое наибольшее число щелбанов Балда может гарантированно поставить Попу?*

Решение. Заметим, что если один из игроков напишет чередующуюся последовательность знаков, то с каждым символом второго будет ровно одно чередование знаков, и Поп получит ровно 100 щелбанов. Значит, Поп может гарантировать, что он не получит больше 100, а Балда — что он даст Попу не меньше 100. Таким образом, ответ на вопрос задачи 100.

Примечание. Если в последовательности Попа есть последовательные одинаковые знаки, то может случиться, что Балда выпишет последовательность, дающую больше щелбанов: между одинаковыми знаками попа он должен поставить противоположный знак, между разными — произвольный. Значит, описанная стратегия Попа — единственная, гарантирующая получение не более 100 щелбанов. Аналогично, если Балда выпишет последовательность, в которой не все знаки чередуются, он рискует не поставить 100 щелбанов.

Ответ. 100 щелбанов.

5. *В биологической лаборатории УрФУ есть несколько пятнистых хамелеонов и одна клетка. Если трёх пятнистых хамелеонов посадить на один час в эту клетку, то количество пятен на каждом из них станет одинаковым, причём таким, каким было до этого у среднего из них по числу пятен. За какое наименьшее количество часов можно гарантировано добиться того, чтобы у всех имеющихся хамелеонов количество пятен стало одинаковым? (Предполагается, что вне клетки хамелеоны не меняют количество пятен.) Решите задачу, если всего имеется*

а) 4 *пятнистых хамелеона;*

б) 5 *пятнистых хамелеонов;*

в) 100 *пятнистых хамелеонов.*

Решение. Назовём количество пятен на хамелеоне его пятнистостью.

а) Если пятнистость всех четырёх хамелеонах разная, то клеткой придётся воспользоваться минимум дважды: при однократном её использовании у трёх хамелеонов пятнистость будет совпадать с первоначальной пятнистостью одного из них, а у четвёртого, не попавшего в клетку, пятнистость будет отличаться. За два использования клетки выполнить задание легко, достаточно в первый раз не сажать в клетку хамелеона, имеющего наибольшее количество пятен, а во второй раз поместить в клетку этого хамелеона с двумя любыми другими.

б) Как было показано ранее, за один час не удастся уровнять пятнистость не то, что у 5, а даже у 4 хамелеонов. А за 2 часа задание выполнить можно: мы оставляем хамелеонов с максимальной и минимальной пятнистостью, а остальных троих сажаем на 1 час в клетку.

Теперь у этих троих пятен поровну, у одного из двух оставшихся не меньше, у второго — не больше. На второй час поместим в клетку этих двоих вместе с любым из тех, кто был в клетке и в первый раз.

в) Предположим, что все хамелеоны имеют разное число пятен. Тогда по крайней мере 99 из них должны поменять количество своих пятен. За каждый час использования клетки не больше двух хамелеонов могут изменить количество своих пятен, поэтому 49 часов не хватит: максиму 98 хамелеонов изменят количество пятен.

Покажем, как обойтись 50 часами. Занумеруем хамелеонов числами от 1 до 100 в соответствии с их пятнистостью: если у хамелеона начальная пятнистость выше, то его номер больше. (Заметим, что если есть хамелеоны с равным числом пятен, то нумерация неоднозначна, в этом случае возьмём любую из допустимых.) В i-й час $(1 \leqslant i \leqslant 49)$ поместим в клетку хамелеонов с номерами $50-i$, 50 и $50+i$ — после этого пятнистость этих троих будет одинаковой и совпадать с пятнистостью номера 50. В последний час поместим в клетку хамелеона с номером 100 и любых двух других.

Ответ. а) 2 часа; б) 2 часа; в) 50 часов.

8 класс

1. *Каждое из чисел $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ равно $+1$ или -1. Какое наибольшее значение может принимать выражение*

$$AEK - AFH + BFG - BDK + CDH - CEG?$$

Решение. Первый способ. Данное выражение — число целое и не больше 6, так как оно представляет собой сумму 6 слагаемых, каждое из которых не больше 1. Покажем, что оно не равняется 6. Предположим противное. Тогда числа AEK, BFG и CDH равны 1, а числа AFH, BDK и CEG равны -1. Но тогда

$$1 = AEK \cdot BFG \cdot CDH = AFH \cdot BDK \cdot CEG = -1$$

и мы приходим к противоречию.

Не может выражение принимать и значение 5, так как будучи суммой 6 нечётных чисел, является числом чётным. А сумма 4 достигается, например, при $A = B = C = E = K = 1$, $F = H = D = G = -1$.

Второй способ. Рассмотрим произведения AD, BE и CF. Каждое из них либо 1, либо -1; по принципу Дирихле среди них есть равные. Пусть $AD = BE$ (остальные случаи аналогичны). Тогда и $AE = BD$, значит, $AEK - BDK = 0$. От выражения остаётся 4 слагаемых, каждое из которых по модулю не больше 1, значит, больше 4 оно быть не может. Остаётся заметить, что, например, при $A = B = D = E = F = G = 1$ и $C = H = K = -1$ выражение принимает значение 4.

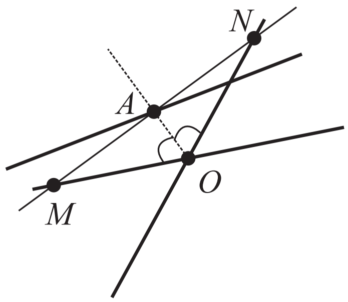
Примечание. На самом деле выражение, о котором идёт речь в задаче, представляет собой определитель $\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{vmatrix}$. Таким образом, задача может быть переформулирована так: найдите наибольшее значение определителя третьего порядка, если модуль каждого его элемента равен 1. Разумеется, в такой формулировке задача может быть предложена только студентам ВУЗов.

Ответ. 4.

2. *Чингачгук хочет прорубить томагавком отверстие в стене. Брошенный им томагавк оставляет в стене трещину в виде отрезка длиной 20 см с серединой в точке, выбранной Чингачгуком перед броском. Но, к сожалению, направление отрезка возникает случайным образом. Известно, что направления трещин (т. е. отрезков) никогда не повторяются. Верно ли, что Чингачгуку всегда хватит пяти бросков, если его устроит дыра в стене любой ненулевой площади?*

Решение. На самом деле Чингачгуку хватит и четырёх бросков. Пусть первые два броска томагавка Чингачгука приходятся в одну точку (назовём её точка O). Две образовавшиеся от этих бросков трещины — это два равных отрезка, пересекающихся в своих серединах. Рассмотрим любой из 4-х углов, ими образуемых и отметим на биссектрисе этого угла точку A, достаточно близкую к точке O, настолько близкую, что на проходящей через A прямой, перпендикулярной биссектрисе, стороны угла высекали бы отрезок

MN длины меньшей 20 см и при этом сам отрезок OA был бы тоже меньше 10 см (см. рисунок). Пусть третий и четвёртый броски Чингачгук делает в точку A. В силу выбора точки A трещина, образуемая любым таким броском, пересечёт один из отрезков OM или ON. Обозначим точки пересечения буквами B и C. Если они обе лежат на отрезке OM или обе на отрезке ON — имеем дыру в виде треугольника ABC, если это не так — в виде четырёхугольника $OBAC$.



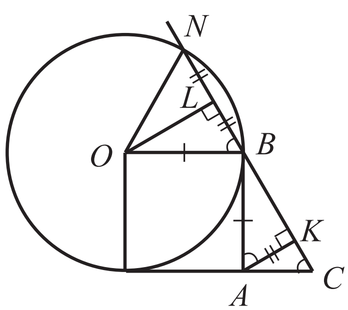
К решению задачи 2, 8 класс

Ответ. Верно.

3. *Разность между шестизначным числом* $\overline{abcdef}$ *и числом* $\overline{fdebca}$ *делится на* 271. *Докажите, что* $b = d$ *и* $c = e$.

Доказательство. Пусть $\overline{bc} = x$ и $\overline{de} = y$. Тогда $\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + x \cdot 10^3 + y \cdot 10 + f$, $\overline{fdebca} = f \cdot 10^5 + y \cdot 10^3 + x \cdot 10 + a$, и их разность равна $(10^5 - 1)(a - f) + (10^3 - 10)(x - y)$. Эта разность делится на 271 по условию, делится на 271 и число $10^5 - 1$ (в частном получается 369), значит, на 271 делится число $(10^3 - 10)(x - y)$. Так как число 271 — простое, и $10^3 - 10 = 990$ на него не делится, то отсюда следует, что на 271 делится число $x - y$. Но число $x - y$ не более, чем двузначное, поэтому единственный вариант, когда это так, это вариант $x - y = 0$. Последнее равенство равносильно условию, что у чисел x и y стоят одинаковые цифры во всех разрядах. Это и требовалось доказать.

4. *На продолжении стороны* MA *квадрата* $MABO$ *за точку* A *отметили точку* C. *Окружность с центром в точке* O *радиуса* OB *пересекает прямую* BC *в двух точках* B *и* N. *Докажите, что длина отрезка* BN *равна удвоенной длине высоты, опущенной на сторону* BC *в треугольнике* ABC.



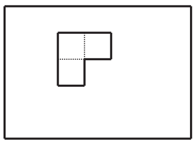
К решению задачи 4, 8 класс

Доказательство. Опустим на прямую BC перпендикуляры OL и AK из точек O и A соответственно. Так как треугольник OBN равнобедренный ($OB = ON$, как радиусы одной и той же окружности), его высота OL является также и медианой, т. е. $BN = 2BL$ и нам надо доказать равенство $BL = AK$. Треугольник AKC — прямоугольный, поэтому $\angle KCA = 90° - \angle KAC = \angle BAC - \angle KAC = \angle BAK$. С другой стороны $\angle ACK = \angle LBO$, как соответственные при параллельных AC и BO и секущей BC. Значит, $\angle LBO = \angle KAB$. Тогда треугольники AKB и BLO равны по острому углу и гипотенузе ($AB = BO$ как стороны квадрата). Отсюда следует, что $LB = AK$, что и требовалось доказать.

5. *В каждой клетке прямоугольника, нарисованного по линиям клетчатого листа бумаги, записано число. Известно, что сумма трёх чисел в каждом как угодно повернутом внутри прямоугольника трёхклеточном уголке (см. рисунок) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем прямоугольнике также положительна?*

Решите задачу, если прямоугольник имеет следующие размеры:

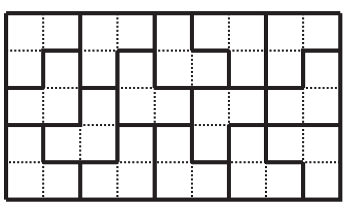
а) 5 х 9 клеток;
б) 2 х 4 клетки;
в) 5 х 5 клеток;
г) 7 х 7 клеток.



К условию задачи 5

Решение. а) Прямоугольник легко разделить на трёхклеточные уголки (см. рисунок). Так как сумма чисел в каждом уголке положительна, сумма всех чисел прямоугольника также положительна.

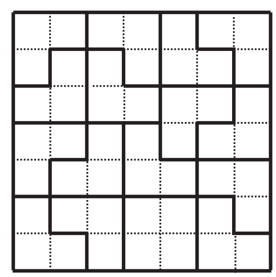
б) Докажем, что суммы чисел внутри любого квадрата 2×2 положительна. Предположим противное. Теперь удалим из квадрата уголок (сумма цифр в нём положительна). Останется 1 число, и это число должно быть отрицательным по предположению. Но мы можем оставить любое из 4 чисел квадрата, поэтому они все отрицательны. Но три из них образуют уголок с положительной суммой - противоречие. Теперь положительный ответ в пункте б) следует из того, что прямоугольник распадается на два квадрата 2×2.



пункт а

-b	a	-b	a	-b
a	a	a	a	a
-b	a	-b	a	-b
a	a	a	a	a
-b	a	-b	a	-b

пункт в)



пункт г)

К решению задачи 5, 8 класс

в) Приведём пример, когда это не так. Пусть a и b два положительных числа. Заполним квадрат так, как показано на рисунке. Сумма чисел в квадрате будет отрицательна, если $16a - 9b < 0$, т. е. при $b > \dfrac{16}{9}a$. Так как в каждом уголке не более одного отрицательного числа, то для того, чтобы было выполнено условие, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $2a - b > 0$. Таким образом достаточно взять в качестве a произвольное положительное число, в качестве b — любое число из промежутка $\left(\dfrac{16}{9}a;\, 2a\right)$ и пример будет построен. Можно даже обойтись целыми числами, например, $a = 9$, $b = 17$.

г) Как уже было доказано при решении пункта б) сумма чисел в любом квадрате 2×2 положительна. Квадрат 7×7 можно разрезать на 15 уголков и квадрат 2×2 (см. рисунок). Поскольку сумма чисел в каждой части разрезания положительна, положительна и вся сумма чисел в квадрате.

Ответ. а) Да. б) Да. в) Нет. г) Да.

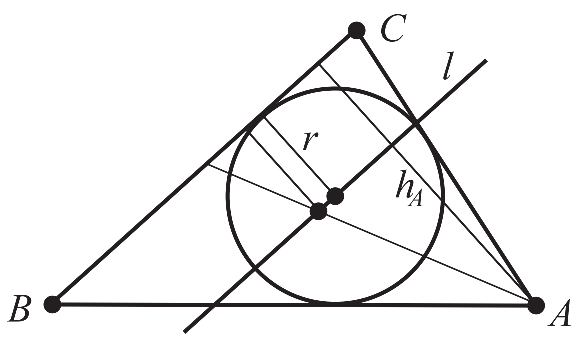
9 класс

1. *Куб с целочисленной стороной удалось без остатка распилить на один куб меньшего размера, но также с целочисленной стороной, и 386 кубиков со стороной 1. Найдите длину стороны исходного куба.*

Решение. Пусть длина стороны исходного куба равна x, тогда его объём равен x^3. Пусть в результате указанного в условии распила образовался куб со стороной y. Тогда сумма объёмов частей, на которые куб распилили, равна $y^3 + 386$. Из уравнения $x^3 = y^3 + 386$ получим $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 386 = 2 \cdot 193$. Если числа x и y разной чётности, то разность их кубов нечётна, и не может равняться 386. Значит, числа x и y одной чётности, число $x - y$ делится на 2, поэтому $x - y = 2$ а $x^2 + xy + y^2 = 193$. Эта система легко решается, получается $x = 9$, $y = 7$ (вторая пара $x = -7$, $y = -9$ не подходит по смыслу переменных).

Ответ. 9.

2. *В треугольнике провели прямую l через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности (предполагается, что эти точки не совпадают). Докажите, что прямая l параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда длины сторон треугольника, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию (т. е. средняя из них равна полусумме двух оставшихся).*



К решению задачи 2
9 класс

Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C и найдём критерий параллельности прямых l и BC. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда расстояние от любой точки одной из них до второй прямой одно и то же вне зависимости от выбранной точки. В нашем случае, это означает, что расстояние от точки пересечения медиан треугольника ABC до прямой BC такое же, что и расстояние до этой прямой от центра вписанной окружности. Первое расстояние равно трети высоты, опущенной на сторону BC (обозначим высоту h_A), а второе — в точности r — радиус вписанного в треугольник круга. Иными словами, условие параллельности прямых l и BC равносильно условию $r = \frac{1}{3}h_A$. Запишем формулы площади треугольника через высоту и через радиус вписанной окружности: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_A = \frac{P}{2}r$. (Здесь P — периметр треугольника). Отсюда $BC \cdot h_A = (AB + BC + CA) \cdot r$, т. е. $\frac{h_A}{r} = \frac{AB + BC + CA}{BC}$. Значит, $r = \frac{1}{3}h_A$ равносильно условию $\frac{AB + BC + CA}{BC} = 3$, которое эквивалентно равенству $BC = \frac{AB + CA}{2}$. Но ровно это нам и требуется доказать.

3. *Каждая из нескольких книг стоит одно и то же целое число центов. Известно, что девять таких книг стоят меньше m евро (m — целое число), а десять книг стоят* *больше, чем $m+1$ евро. При каких значениях m по этим данным можно однозначно определить стоимость одной книги? (В одном евро 100 центов.) Ответ обосновать.*

Решение. Пусть цена одной книги a центов. Условие задачи означает, что $9a < 100m$ и $10a > 100(m+1)$. Эти два условия равносильны следующему двойному неравенству: $10(m+1) < a < \dfrac{100m}{9}$. Отсюда $10(m+1) < \dfrac{100m}{9}$, т. е. $m > 9$. С другой стороны, для того, чтобы a нашлось однозначно, необходимо, чтобы в интервале $\left(10(m+1); \dfrac{100m}{9}\right)$ встретилось не больше одного целого числа, поэтому длина этого интервала должна быть не больше 2. Из неравенства $\dfrac{100m}{9} - 10(m+1) \leqslant 2$ следует, что $m \leqslant 10,8$. Так как m — число целое, $m = 10$, при других m однозначно стоимость книги не найти. При $m = 10$ двойное неравенство имеет вид $110 < a < 111,(1)$, откуда $a = 111$.

Ответ. Только при $m = 10$.

4. *Знайка собирается отметить на координатной плоскости 25 точек общего положения (т. е. никакие три точки не лежат на одной прямой), обе координаты которых целочисленны. После этого ему нужно будет провести все возможные отрезки с концами в отмеченных точках, середина которых также имеет целочисленные координаты. Какое наименьшее число отрезков придётся провести Знайке?*

Решение. Так как координаты середины отрезка — это полусумма координат его концов, то отрезок с концами в точках $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ будет проведён в том и только том случае, когда в каждой из пар (x_A, y_A) и (x_B, y_B) оба числа имеют одинаковую чётность. Таким образом, все отмеченные точки делятся на четыре класса (в один класс — точки, у которых обе координаты чётны, в другой — у которых чётна только первая координата и т.д.), причём проведённые отрезки соединяют точки одного класса и только их. Ясно, что если в некотором классе k точек, то они образуют $\dfrac{k(k-1)}{2}$ пар, и именно столько отрезков в этом классе будет проведено. Задача становится следующей: найти наименьшее значение суммы $\sum\limits_{i=1}^{4} \dfrac{k_i(k_i-1)}{2}$, при условии, что k_i — целые неотрицательные числа и $\sum\limits_{i=1}^{4} k_i = 25$.

Покажем, что сумма наименьшая, если количества точек в разных классах либо совпадают, либо отличаются на 1. Пусть это не так, и пусть, например, $k_4 - k_1 \geqslant 2$. Рассмотрим набор k_1+1, k_2, k_3, k_4-1. Ясно, что все числа этого набора по-прежнему целые, неотрицательные, в сумме дают 25, однако $(k_1+1)k_1 + (k_4-1)(k_4-2) = k_1(k_1-1) + k_4(k_4-1) - 2(k_4-k_1-1) < k_1(k_1-1) + k_4(k_4-1)$. Противоречие с тем, что набор $\{k_i\}_{i=1}^{4}$ даёт наименьшую сумму. Утверждение доказано.

Заметим, что $4 \cdot 6 < 25 < 4 \cdot 7$. Это значит, что есть класс, в котором больше 6 точек, и есть класс, в котором точек меньше 7. С учётом доказанного выше утверждения, получаем, что в каждом классе либо 6, либо 7 точек. Это возможно только если 1 класс состоит из 7 точек (и в нём проведён 21 отрезок), а остальные 3 класса содержат по 6 точек (и в каждом проведено 15 отрезков). Всего в этом случае будет проведено $21 + 3 \cdot 15 = 66$ отрезков.

Ответ. 66 отрезков.

5. *Каждую вершину правильного N-угольника покрасили в один из двух цветов. Обязательно ли найдётся равнобедренный треугольник, все вершины которого окрашены в один цвет?*

Решите задачу в следующих случаях:

а) $N = 6$*;*

б) $N = 2015$*;*

в) $N = 8$*;*

г) $N = 10$*;*

д) $N = 2016$*.*

Решение. а) Пусть две противоположные вершины окрасили в один цвет, остальные 4 — в другой. Одноцветного равнобедренного треугольника в этом случае нет.

б) Первый способ. Заметим, что $2015 = 5 \cdot 403$ и рассмотрим 5 вершин с номерами 403, $403{\cdot}2$, $403{\cdot}3$ $403{\cdot}4$ и $403{\cdot}5$. Они являются вершинами правильного пятиугольника, поэтому любые три из них являются вершинами равнобедренного треугольника. По принципу Дирихле какие-то три из них окрашены в один цвет, а, значит, одноцветный равнобедренный треугольник заведомо существует.

Второй способ. Покажем, что для любого нечётного $N > 3$ ответ на вопрос задачи положителен. Рассмотрим произвольный правильный нечётноугольник с вершинами, окрашенными в 2 цвета, пусть в белый и чёрный. Ввиду нечётности N есть две одноцветные вершины, стоящие рядом. Пусть это вершины A и B и пусть они для определённости белые. Если одна из соседних с ними вершин также белая, то мы имеем три последовательные вершины одного цвета; ясно, что они образуют одноцветный треугольник. Пусть обе соседние вершины (обозначим их C и D) — чёрные. Рассмотрим серединный перпендикуляр к отрезку AB, он же — серединный перпендикуляр к отрезку CD. На этом перпендикуляре лежит одна из вершин нашего нечётноугольника, обозначим её E. Тогда из равнобедренных треугольников AEB и CED один одноцветный.

в) Будем раскрашивать вершины последовательно, двигаясь по периметру 8-угольника: две в один цвет, две во второй, две снова в первый, две снова во второй. Тогда вершины одного цвета представляют собой вершины прямоугольника, отличного от квадрата, следовательно, никакие три из них равнобедренного треугольника не образуют.

г) Решение аналогично пункту б) (первый способ).

д) Заметим, что если ответ на вопрос задачи положителен для некоторого натурального k, то он также положителен и для любого делящегося на k целого числа. В силу пункта б) (второй способ) ответ положителен для нечётных k, больших числа 3. У числа 2016 есть такие делители: числа 7, 9 и другие. Значит, одноцветный треугольник есть.

Примечание. Можно доказать, что ответ на вопрос задачи отрицателен в случаях $N \in \{3,\ 4,\ 6,\ 8\}$ и положителен в остальных случаях.

Ответ. а), в) нет; б), г), д) да.

10 класс

1. *Целые числа x, y и z таковы, что $xy + yz + zx = 1$ Докажите, что число*

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$$

является квадратом целого числа.

Решение. Заметим, что $1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x + z)(x + y)$. Аналогично, $1 + y^2 = (y + z)(x + y)$ и $1 + z^2 = (y + z)(x + z)$. Значит, число из условия задачи равно $\Big((x + y)(y + z)(x + z)\Big)^2$ — квадрат целого числа.

2. *На плоскости даны правильный треугольник $A_1A_2A_3$ (нумерация вершин треугольника против часовой стрелки) и точка P, не лежащая на прямой A_1A_3. Точку P повернули на $60°$ вокруг точки A_1, полученную точку P' — на $60°$ вокруг точки A_2, новую точку P'' — на $60°$ вокруг точки A_3 в точку Q (все три поворота осуществлялись по часовой стрелке). Докажите, что четырёхугольник A_1QA_3P — параллелограмм.*

Решение. Первый способ. Рассмотрим куда при указанных поворотах перейдут вершины исходного треугольника.

Вершина A_1 при первом повороте останется на месте (она — центр поворота). При втором повороте она перейдёт, как легко заметить, в вершину A_3. Третий поворот её оставит на месте. Значит, вершина A_1 в результате преобразования перейдёт в вершину A_3.

Вершина A_2 при первом повороте перейдёт в точку, симметричную точке A_3 относительно стороны A_1A_2. При втором — в вершину A_1. При третьем — в точку, симметричную точке A_2 относительно прямой A_1A_3

Аналогично, вершина A_3 при первом повороте перейдёт в вершину A_2. При втором — останется неподвижной, при третьем — перейдёт в вершину A_1. Мы выяснили, что в результате преобразования вершины A_1 и A_3 меняются местами.

Так как композиция поворотов есть движение, то прямая A_1A_3 перейдёт в прямую A_3A_1 (останется на месте). Полуплоскость с границей A_1A_3, содержащая точку A_2, перейдёт во вторую полуплоскость и наоборот. Так как P не лежит на прямой A_1A_3, точки P и Q будут в разных плоскостях относительно этой прямой. Это значит, что мы получим четырёхугольник A_1QA_3P (а не A_1QPA_3, например). При движении расстояния между точками равно расстоянию между их образами, поэтому треугольник A_1PA_3 перейдёт в равный ему треугольник A_3QP_1. В частности, $A_1P = A_3Q$ и $A_3P = A_1Q$. Это означает, что в четырёхугольнике A_1QA_3P противоположные стороны попарно равны, т. е. этот четырёхугольник — параллелограмм.

Второй способ. Всякий поворот является композицией двух осевых симметрий (с осями, проходящими через центр поворота). Значит, последовательное применение трёх поворотов, указанных в задаче есть композиция 6 осевых симметрий. По теореме Шаля такая композиция (как любая композиция ЧЁТНОГО числа осевых симметрий) есть либо тождественное отображение, либо параллельный перенос, либо поворот. Это не тождественное отображение, так как точка P перешла в другую точку Q. Заметим, что середина отрезка A_1A_3 (обозначим эту точку буквой M) при данном преобразовании последовательно перейдёт в середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1, т. е. будет неподвижной точкой. Так как параллельный перенос неподвижной точкой не обладает, рассматриваемая композиция может быть только поворотом, а точка M его центром. Непосредственно убеждаемся, что точка A_1 переходит в точку A_3. Это значит, что угол поворота равен $180°$, а поворот является центральной симметрией. Значит, точка A_3 переходит обратно в точку A_1, точка Q — обратно в точку P, и весь четырёхугольник A_1QA_3P — в себя. Но центрально-симметричный четырёхугольник есть параллелограмм. Утверждение доказано.

3. *Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Решение.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)>$$

$$>\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}+(n^2-n)\cdot\frac{1}{n^2}=1.$$

4. *Барон Мюнхгаузен однажды участвовал в сражении между тремя армиями: красных, синих и зеленых. Армии обстреливали друг друга пушечными ядрами. При этом в армии красных не хватало пушек, поэтому они по синим не стреляли (а синие и зеленые стреляли по обеим вражеским армиям). Барон служил в армии красных и каждый день на ядрах летал на разведку. Он садился на ядро, выпускаемое красными, летел на позицию зелёных, пересаживался на ядро, выпущенное зелёными, и летел на нём до позиции армии, по которой оно было выпущено, затем пересаживался на ядро, выпущенное той армией, и летел до следующей армии, где вновь пересаживался и т.д. Каждый день барон путешествовал ровно на 10 ядрах, и с последним из них возвращался на позицию красных. Известно, что ни в один из дней барон не повторил свой маршрут, но все возможные маршруты им были пройдены. (Под маршрутом понимается последовательность армий, которые посетил барон за день, летая на ядрах, например КЗСКЗСКЗСЗК — по первым буквам названий армий.) Сколько дней длилось сражение?*

Решение. Будем рассматривать всевозможные маршруты (не только длины 11), но начинающиеся и кончающиеся в армии красных. Пусть количество таких всевозможных маршрутов длины k равно x_k (k — натуральное число). Нам требуется найти x_{11}. Заметим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ (маршрут КЗК) $x_4 = 1$ (единственный маршрут КЗСК). Пусть $k > 4$. Запишем начала всевозможных маршрутов, при этом заметим, что вторая буква маршрута всегда буква З (ведь красные по синим не стреляют). Эти начала таковы: КЗК, КЗСК, КЗСЗ. Маршрутов с началом КЗК будет столько же сколько маршрутов длины $k-2$, маршрутов с началом КЗСК — сколько маршрутов длины $k-3$. Наконец, маршрутов с началом КЗСЗ тоже столько же, сколько маршрутов длины $k-2$: мы просто как бы добавили в такой маршрут вторую и третью букву. Таким образом, выполняется равенство $x_k = 2x_{k-2} + x_{k-3}$. Тогда $x_5 = 2$, $x_6 = 3$, $x_7 = 5$, $x_8 = 8$, $x_9 = 13$, $x_{10} = 21$, $x_{11} = 34$. Задача решена.

Примечание. Можно доказать, что полученная последовательность x_n, начиная с x_3 есть последовательность чисел Фибоначчи. Точнее, имеет место равенство $x_{k+2} = \Phi_k$ для всех натуральных k (Здесь Φ_k — k-е число Фибоначчи.)

Ответ. 34 дня.

5. *Дан правильный n-угольник ($n \geqslant 3$). Требуется расставить натуральные числа от 1 до n в его вершины, а натуральные числа от $n+1$ до $2n$ в середины его сторон (по одному числу в вершину и по одному — в середину каждой из сторон) так, чтобы все суммы трёх чисел, лежащих на каждой из сторон n-угольника, были равны.*

1) Существует ли такая расстановка для $n = 5$?
2) Существует ли такая расстановка для $n = 4$?
3) Приведите пример требуемой расстановки для $n = 13$.
4) Найдите все натуральные n, для которых задача имеет решение.

Решение.

1) Существует. 1 — 9 — 4 — 8 — 2 — 7 — 5 — 6 — 3 — 10 — 1.

2) Пусть такая расстановка существует и S — сумма трёх чисел на каждой из сторон при этой расстановке. Сложим все суммы на сторонах, получим $4S$. Но эта же сумма получится если мы сложим все записанные числа, при этом числа, стоящие в вершинах, учтём дважды. Получим $4S = 1 + 2 + \ldots + 8 + (1 + 2 + 3 + 4)$, т. е. $4S = 46$. Отсюда число S не является целым — противоречие. Значит, при $n = 4$ расстановки не существует.

3) Для любого нечётного числа $n \geqslant 3$ можно построить расстановку таким образом: числа 1, 2, 3, …, n последовательно будем ставить в вершины многоугольника через одну (т. е. в первую вершину ставим 1, вторую вершину пропускаем, в третью вершину ставим 2, четвёртую пропускаем, в пятую ставим 3 и т. д.). В силу нечётности n мы пройдём все вершины. (В частности, во второй вершине будет стоять число $\dfrac{n+3}{2}$, в четвёртой — число $\dfrac{n+5}{2}$ и т. д.) Теперь можно заметить, что суммы двух чисел, которые уже стоят на каждой из сторон, образуют возрастающую последовательность с шагом 1 (наименьшая сумма на стороне между первой и n-ой вершиной). Остаётся только подставить в середины этих сторон числа $n+1$, $n+2$, …, $2n$ в противоположном порядке. Именно так устроены последовательности и в первых двух пунктах. А конкретно для $n = 13$ получим 1 — 25 — 8 — 24 — 2 — 23 — 9 — 22 — 3 — 21 — 10 — 20 — 4 — 19 — 11 — 18 — 5 — 17 — 12 — 16 — 6 — 15 — 13 — 14 — 7 — 26 — 1. (На каждой стороне сумма 34.)

4) В пункте 3) показано, что все нечётные $n \geqslant 3$ подойдут, а в пункте 4) — что $n = 4$ не подойдёт. По аналогичным причинам не подойдёт никакое чётное n. В самом деле, если S — сумма трёх чисел на каждой из сторон, а в вершинах стоят числа от 1 до n, имеем равенство $nS = 1 + 2 + \ldots + 2n + (1 + 2 + \ldots + n)$, откуда $nS = n(2n+1) + \dfrac{n(n+1)}{2}$. Левая часть и первое слагаемое правой части делятся на n, а второе слагаемое правой части на n не делится (число $\dfrac{n+1}{2}$ не целое). Противоречие.

Ответ 1) Существует; 2) не существует; 3) см. пример в тексте решения; 4) любое нечётное число, кроме 1.

11 класс

1. *Вычислите сумму*

$$(a+b)+(a^2+ab+b^2)+(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n).$$

(Здесь a и b — различные действительные числа.)

Решение.

$$(a+b)+(a^2+ab+b^2)+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n)=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)+(a-b)(a^2+ab+b^2)+\ldots+(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n)}{a-b}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)+(a^3-b^3)+\ldots+(a^{n+1}-b^{n+1})}{a-b}=$$

$$=\frac{(a^2+a^3+\ldots+a^{n+1})-(b^2+b^3+\ldots b^{n+1})}{a-b}=$$

$$=\frac{a^2\cdot\dfrac{1-a^n}{1-a}-b^2\cdot\dfrac{1-b^n}{1-b}}{a-b}=\frac{a^2(1-b)(1-a^n)-b^2(1-a)(1-b^n)}{(a-b)(1-a)(1-b)}.$$

Ответ. $\dfrac{a^2(1-b)(1-a^n)-b^2(1-a)(1-b^n)}{(a-b)(1-a)(1-b)}$.

2. *Через точку M внутри шара радиуса R на расстоянии a от его центра проведены три взаимно перпендикулярные плоскости. Определите сумму площадей кругов, полученных при пересечении шара этими плоскостями.*

Решение. Введём систему координат с началом в центре шара и осями, перпендикулярными проведённым плоскостям. Пусть в этой системе координат точка M получит координаты $(t;\,p;\,r)$. (По условию $t^2+p^2+r^2=a^2$.) Это значит, что плоскости отстоят от центра шара на расстояния $|t|$, $|p|$ и $|r|$ соответственно. Поэтому при пересечении шара указанными плоскостями будут получаться круги радиусов $\sqrt{R^2-t^2}$, $\sqrt{R^2-p^2}$ и $\sqrt{R^2-r^2}$. Сумма площадей этих кругов равна $\pi(R^2-t^2)+\pi(R^2-p^2)+\pi(R^2-r^2)=\pi(3R^2-(t^2+p^2+r^2))=\pi(3R^2-a^2)$.

Ответ. $\pi(3R^2-a^2)$.

3. *Решите уравнение $x^3-px+\sqrt{p-1}=0$. (p — параметр.)*

Решение. Пусть $t=\sqrt{p-1}\geqslant 0$. Тогда уравнение принимает вид $x^3-t^2x-x+t=0\Leftrightarrow x(x^2-t^2)-(x-t)=0\Leftrightarrow(x-t)(x^(x+t)-1)=0$. Отсюда либо $x=t=\sqrt{p-1}$, либо $x^2+tx-1=0$. Дискриминант последнего уравнения равен t^2+4 и всегда положителен; поэтому это уравнение имеет два корня: $x=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2+4}}{2}=\dfrac{-\sqrt{p-1}\pm\sqrt{p+3}}{2}$. Все эти корни существуют для всех значений параметра, при которых выражение определено, т.е. при $p\geqslant 1$.

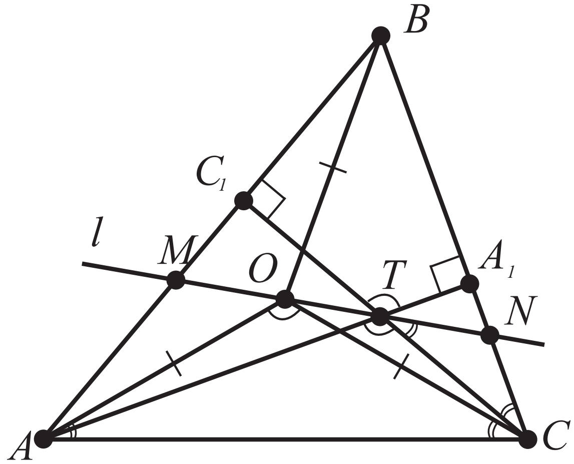
Ответ. При $p \geqslant 1$ три корня: $x_1 = \sqrt{p-1}$, $x_2 = \dfrac{-\sqrt{p-1}-\sqrt{p+3}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-\sqrt{p-1}+\sqrt{p+3}}{2}$. При $p < 1$ корней нет.

4. *В остроугольном треугольнике ABC выполняется $\angle B = 60^\circ$. Прямая l проходит через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC (предполагается, что эти точки не совпадают). При этом l пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно.*

а) Докажите, что треугольник MBN равносторонний.

б) Найдите MN, если $AB = c$ и $BC = a$.

.



К решению задачи 4
11 класс

Решение. Первый способ. Сначала докажем утверждение пункта а.

1) Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, T — точка их пересечения, O — центр описанной около треугольника окружности. Без ограничения общности будем считать, что точка T лежит на отрезке NO (см. рисунок).

2) Четырёхугольник BA_1TC_1 имеет два прямых угла и угол $B = 60^\circ$; Тогда четвёртый его угол, угол T равен 120° (сумма углов любого четырёхугольника всегда 360°).

3) $\angle ATC = \angle A_1TC_1$, как вертикальные, поэтому $\angle ATC = 120^\circ$.

4) Треугольники AOB, BOC и COA — равнобедренные ($OA = OB = OC$, как радиусы описанной окружности). Тогда $\angle BAO + \angle BCO = \angle AB0 + \angle CBO = \angle ABC = 60^\circ$. Далее из треугольника ABC находим $\angle CAO + \angle ACO = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAO - \angle BCO = 60^\circ$. Так как $\angle CAO = \angle ACO$, каждый из этих углов равен 30°. Также из треугольника ACO находим, что $\angle AOC = 120^\circ$.

5) Из двух предыдущих пунктов видим, что $\angle ATC = \angle AOC$. Учитывая, что точки T и O лежат по одну сторону от прямой AC (они обе лежат внутри треугольника ABC) заключаем, что около четырёхугольника $AOTC$ можно описать окружность.

6) Четырёхугольник $AOTC$ описанный, поэтому $\angle NTC = 180^\circ - \angle OTC = \angle OAC = 30^\circ$. Из треугольника C_1BC находим $\angle C_1CB = 30^\circ$. Значит $\angle TNC = 120^\circ$ (из треугольника TNC).

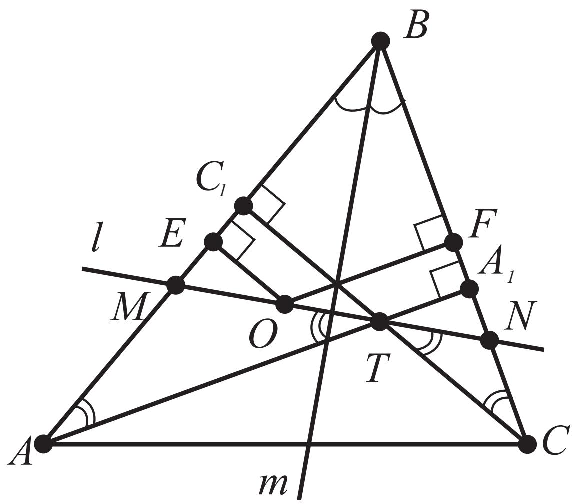
7) В треугольнике MBN угол $B = 60^\circ$, $\angle N = 180 circ - \angle ONC = 60^\circ$, поэтому этот треугольник равносторонний, ч. т. д.

Пункт а) выполнен.

Примечание. Известно, что точки пересечения высот, медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой (*прямой Эйлера*)

Переходим к пункту б). Рассмотрим треугольник TNC. $\angle TNC = 120^\circ$, $\angle TCN = \angle C_1CB = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$. Тогда $\angle TCN = 30^\circ$ (сумма углов треугольника), и треугольник TNC равнобедренный. Таким образом $TN = NC$. Аналогично доказывается, что $TM = MA$.

Имеем $AB+BC = AM+MB+BN+NC = TM+MB+BN+NT = MB+BN+NM = 3NM$. Отсюда $NM = \dfrac{a+c}{3}$.



К решению задачи 4
11 класс

Второй способ. (Предложен участником олимпиады).

1) Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, T — точка их пересечения, O — центр описанной около треугольника окружности, она же — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC.

2) Пусть точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно; тогда $OE \perp AB$, поэтому $OE \parallel CC_1$. Аналогично $OF \parallel AA_1$ (см. рисунок).

3) Так как в прямоугольном треугольнике AA_1B один из углов равен $60°$, то меньший катет треугольника равен половине гипотенузы, т. е. $BA_1 = 0,5BA = BE$. Аналогично $BC_1 = BF$.

4) Проведём биссектрису угла ABC — прямую m и рассмотрим осевую симметрию относительно этой биссектрисы.

5) Лучи BA и BC перейдут при этой симметрии друг в друга (свойство биссектрисы угла). Так как $BA_1 = BE$, точки A_1 и E также перейдут друг в друга. Это же верно для пары точек C_1 и F.

6) Прямая OE перпендикулярна прямой AB, поэтому она перейдёт в прямую, перпендикулярную прямой AC. Так как точка E переходит в точку A_1, прямая OE перейдёт в прямую AA_1, и наоборот. Аналогично прямая OF перейдёт в прямую CC_1.

7) Точка O, как точка пересечения прямых OE и OF, перейдёт в точку пересечения прямых AA_1 и CC_1, т. е. в точку T. Значит, прямая OT перпендикулярна оси симметрии, т. е. $l \perp m$.

8) Треугольник MBN — равнобедренный, так как у него высота совпадает с биссектрисой. Так как один из его углов $60°$, он является равносторонним. Пункт а доказан.

9) В треугольнике TNC угол N равен $120°$ (внешний угол равностороннего треугольника), а $\angle TCN = 30°$ (из треугольника CC_1B), поэтому $\angle CTN = 30° = \angle TCN$ и $TN = NC$. Аналогично $TM = MA$.

10) Пусть $x = BM = BN = MN$. Тогда $c + a = AB + BC = AM + x + x + NC = 2x + MT + TN = 3x$, откуда $x = \dfrac{a+c}{3}$.

Ответ. б) $NM = \dfrac{a+c}{3}$.

5. *Дед Мороз составляет подарки из конфет, имея в распоряжении конфеты* 11 *различных сортов (конфет каждого сорта неограниченно много). Требуется, чтобы в каждом подарке все конфеты имели разные сорта. Готовые подарки Дед Мороз складывает в мешок.*

Считается, что подарок А хуже подарка Б, если подарок А может быть получен из подарка Б удалением нескольких (не менее, чем одной) конфет. Дед Мороз собирает мешок подарков таким образом, чтобы все подарки в мешке были различными, и чтоб ни один подарок в мешке не был хуже никакого другого.

А) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не больше 3 *конфет. Докажите, что он сможет собрать другой мешок, в котором подарков столько же, но при этом в каждом подарке будет не меньше* 8 *конфет.*

Б) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не меньше 1 *и не больше* 2 *конфет. Докажите, что он сможет собрать ещё один мешок, в котором подарков столько же или больше, и в каждом подарке из которого ровно* 2 *конфеты.*

В) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого не меньше 3 *и не больше* 4 *конфет. Докажите, что он сможет собрать ещё один мешок, в котором подарков столько же или больше, и в каждом подарке из которого ровно* 4 *конфеты.*

Г) Дед Мороз собрал мешок, в каждом подарке из которого ровно 5 *конфет, при этом каждая возможная комбинация из* 5 *различных сортов конфет встречается ровно по одному разу (таким образом, в мешке* $C_{11}^5 = 462$ *подарка). Докажите, что собрать мешок с большим количеством подарков невозможно.*

Решение. А) Если X — подарок, то пусть подарок X' состоит в точности из конфет тех сортов, которых нет в подарке X. Заметим, что если в подарке X не больше 3 конфет, то в подарке X' не меньше 8 конфет. Обозначим мешок, собранный Дедом Морозом, через M. Тогда мешок $M' = \{X' :$ подарок X лежит в $M\}$ — искомый. (Несложно убедиться в том, что в мешке M' нет двух подарков, один из которых был бы хуже другого.)

Б) Утверждение очевидно, если все подарки в мешке состоят из двух конфет: в этом случае Дед Мороз соберёт точно такой же мешок. Также очевидно утверждение в случае, когда все подарки однокофетные: мешок, содержащий все возможные двухконфетные подарки и только их удовлетворяет условию. Пусть в мешке есть и одноконфетные подарки, и двухконфетные. Возьмём любую конфету, которая есть в каком-то двухконфетном подарке. Тогда этот сорт конфета не встречается ни в каком одноконфетном (случись такое — однокофетный подарок был бы хуже). Добавим конфету выбранного сорта во все одноконфетные подарки. Легко проверяется, что полученный мешок — искомый.

В) Уберём из мешка все 3-х конфетные подарки. Вместо них добавим в мешок по одному из всех возможных 4-х конфетных подарков, которые можно получить из убранных 3-х конфетных добавлением одной конфеты (так, чтобы все 4 конфеты были различны). Очевидно, что в новом мешке все подарки различны (иначе в исходном мешке один из убранных 3-х конфетных подарков был бы хуже некоторого 4-х конфетного) и ни один подарок не хуже другого.

Покажем, что после этой операции количество подарков в мешке не уменьшилось. Нарисуем граф, вершинами которого являются убранные 3-х конфетные подарки (пусть их всего x штук) и новые 4-х конфетные подарки (пусть их всего y штук). Каждый 3-х конфетный подарок соединим ребром с каждым новым 4-х конфетным, который можно получить из него добавлением 1 конфеты. Обозначим количество рёбер в полученном графе через p. С одной стороны, $p = x \cdot (11 - 3) = 8x$ так как из каждой вершины, соответствующей трёхконфетному подарку, выходит ровно 8 рёбер. С другой стороны, каждый 4-х конфетный подарок можно получить из не более чем четырёх различных 3-х конфетных, поэтому $r \leqslant 4y$. Таким образом, $8x \leqslant 4y$, следовательно, $y \geqslant 2x > x$. Это означает, что количество подарков даже увеличилось.

Г) Первый способ. Пусть у нас уже есть некоторый мешок подарков M. На каждом шаге мы будем убирать и него часть подарков и докладывать в него новые подарки. Мы будем делать это так, чтоб по окончании каждого шага мешок подарков удовлетворял всем требованиям задачи (в нём не было бы двух подарков, один из которых хуже другого), но количество подарков в нём было не меньше, чем перед началом шага. Если при этом на последнем шаге мы получим мешок, в каждом подарке из которого ровно 5 конфет, то задача, очевидно, будет решена.

Шаг 1. Пусть минимальное количество конфет в подарках из мешка M равно k и $k < 6$. (Если $k \geqslant 6$, то пропустим этот шаг и перейдём сразу к шагу 2.) Применим к данному мешку точно такую же процедуру, которую мы применяли к мешку подарков в решении пункта (Б), заменив 3 на k и 4 — на $k+1$. После этой процедуры в каждом подарке из нового мешка будет не меньше, чем $k+1$ конфета. Рассуждая так же, как в пункте (Б), убеждаемся, что новый мешок подарков удовлетворяет всем условиям задачи, и что подарков в нём не меньше, чем в исходном.

Будем повторять этот шаг до тех пор, пока минимальное количество конфет в подарках из мешка меньше 6.

Шаг 2. Теперь в каждом подарке мешка не меньше 6 конфет. Применим к мешку подарков процедуру из решения пункта (А). После этого в каждом подарке из нового мешка будет не больше 5 конфет.

Шаг 3. Теперь снова будем применять процедуру из шага 1 до тех пор, пока в каждом подарке не станет ровно по 5 конфет.

Задача решена.

Второй способ. (Изложен математиком А. М. Райгородским). Покажем, что если у Деда Мороза всего N сортов конфет, то в любом собранном им мешке подарков будет не больше, чем всевозможных подарков, содержащих $\left[\dfrac{N+1}{2}\right]$ конфет каждый (здесь $[a]$ — целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа a). Для этого рассмотрим всевозможные подарки (включая пустой подарок, который не содержит ни одной конфеты) и распределим все эти подарки в непересекающиеся цепочки так, чтобы выполнялись два условия

каждый следующий подарок цепочки получался из предыдущего подарка этой цепочки добавлением ровно одной конфеты; (*)

количество конфет в самом бедном и в самом богатом подарке любой цепочки равнялось бы ровно N. (**)

(Легко заметить, что эти условия гарантируют нахождение в любой цепочке ровно одного подарка, содержащего $\left[\dfrac{N+1}{2}\right]$ конфет. Значит, всего этих цепочек столько же, сколько подарков указанного типа. Так как из каждой цепочки в мешок больше одного подарка взять нельзя (в каждой цепочке более бедный подарок хуже более богатого), то подарков в мешке не больше, чем цепочек и утверждение будет доказано.)

Распределение проведём индукцией по числу конфет.

База индукции. Пусть $N = 1$. Тогда всего существует два подарка (пустой и одноконфетный), которые и образуют единственную цепочку.

Индуктивный переход. Пусть указанное распределение для некоторого N построено. Добавим ещё один сорт конфет, сорт a. Пусть $T_1 < T_2 < \dots T_l$ — одна из цепочек предыдущего распределения (T_i — подарки, $A < B$ означает, что подарок B получен из подарка A добавлением ровно одной конфеты). По этой цепочке составим две цепочки нового распределения $T_1 < T_2 < \dots T_l < T_l \cup \{a\}$ и $T_1 \cup \{a\} < T_2 \cup \{a\} < \dots T_l \cup \{a\}$, при этом цепочку второго типа будем создавать только в том случае, если $l > 1$ (в первоначальной цепочке более одного подарка.) Все полученные цепочки и будут создавать требуемое распределение для $N+1$. Докажем это.

Выполнение условия (*) очевидно по построению. Условие (**) выполняется в силу того, что при построении цепочки первого типа количество конфет в самом бедном подарке не изменилось, а количество конфет в самом богатом стало больше на 1; при построении цепочки второго типа, наоборот, количество конфет в самом бедном подарке возросло на 1, а в самом богатом осталось неизменным. Поэтому в обоих случаях количество конфет в самом бедном и самом богатом подарке любой цепочки в сумме увеличилось на 1 и стало равным $N+1$. Осталось показать, что каждый возможный подарок входит ровно в одну построенную цепочку.

Действительно, если в подарке конфеты сорта a нет, то этот подарок входит в ту единственную цепочку, которая получилось первым способом из цепочки, содержащей ранее этот подарок. Пусть в некотором подарке T есть конфета сорта a. Рассмотрим подарок $T^+ = T \setminus \{a\}$ и цепочку, в которой он находился. Если подарок T^+ был самым богатым подарком цепочки, то подарок T просто добавился к этой цепочке (первый тип построения). Иначе подарок T находится ровно в одной цепочке, полученной вторым способом. Доказательство завершено, завершено и индуктивное построения распределения подарков в цепочки. Утверждение задачи доказано.