ТРИНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

5 — 6 класс

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать на плоскости десятиугольник, у которого все стороны располагаются ровно на пяти прямых. Не завирает ли барон? (*7 баллов*)

2. Буржуины заплатили несколько долларов Плохишу за то, чтобы он предал Мальчиша-Кибальчиша. Плохиш хочет купить на них варенье, печенье и конфеты. Если он купит только банку варенья, то у него останется три доллара, если только корзину печенья — то четыре доллара, а если только коробку конфет, то останется восемь долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить банку варенья и корзину печенья? (*7 баллов*)

3. Агентство науки и дошкольного образования решило начать подготовку к ЕГЭ с групп одного детского сада (всего в саду 250 малышей). Каждый малыш должен построить один вертикальный столбик высотой 5 кубиков из одинаковых кубиков трех цветов: красного, синего и белого. Чиновники требуют, чтобы среди этих 250 столбиков не было двух одинаковых. Смогут ли воспитатели детского сада (или родители) помочь детям выполнить приказ сверху? (*7 баллов*)

4. Больному требуется наложить компресс и держать его ровно 20 минут. Как их отмерить, имея только двое песочных часов: одни на 9 минут, вторые — на 7 минут? (*7 баллов*)

5. Можно ли копиями плитки, изображённой на рисунке (A, B, M, N — некоторые положительные числа), замостить (т.е. покрыть без наложений) всю плоскость, если плитки можно поворачивать на любой угол и даже переворачивать? Решите задачу в следующих случаях:

к задаче 5

1. $A = B = 2$, $M = N = 1$.
2. $A = 2014$, $B = 2$, $M = 2011$, $N = 1$.
3. $A = 5$, $B = 3$, $M = 1$, $N = 1$.
4. $A \geqslant 2$ и $B \geqslant 2$ — произвольные целые числа, $M = 1$, $N = B - 1$.
5. A, B, M, N — произвольные положительные числа (не обязательно целые), $M < A$, $N < B$.

(*14 баллов*)

ТРИНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

7 класс

1. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и Винни-Пух пошел по прямой к дому Кристофера Робина, а Пятачок — к пчелиному дуплу (тоже по прямой). Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились, причём ни тот, ни другой не успели дойти до первоначальной цели. Сколько времени могло продолжаться их путешествие (с момента выхода из дома до встречи)? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время. (*7 баллов*)

2. По лыжне кольцевого маршрута с постоянными скоростями бегут Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а Старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой — каждые 3 минуты. Через сколько минут крокодил Гена обгоняет Чебурашку? (*7 баллов*)

3. На доске записано 2013 натуральных чисел. Докажите, что одно из них можно стереть так, чтобы сумма оставшихся чисел была чётной. (*7 баллов*)

4. Жили-были дед да баба, ели кашу с молоком … из одной тарелки. Начали они есть кашу одновременно, на разговоры не отвлекались. Если бы дед ел со скоростью бабы, то кашу они ели бы на 3 минуты дольше, а если бы наоборот, баба ела со скоростью деда, то кашу съели бы на 2 минуты быстрее. Определите, за какое время дед и баба съели кашу. (*7 баллов*)

5. Знайка выдал Незнайке некую конструкцию, составленную из пустых ячеек. Незнайка заполняет ячейки камушками по следующему правилу: каждым ходом он выбирает одну из незаполненных ячеек и кладет в неё на один камушек больше, чем количество соседних ячеек, в которых уже есть камни (в частности, первым ходом он кладёт один камень в некоторую пустую ячейку). Незнайка действует так до тех пор, пока в конструкции есть хотя бы одна пустая ячейка. Знайке неизвестно, в каком порядке Незнайка будет заполнять ячейки. Тем не менее, он утверждает, что знает сколько всего камней окажется в конструкции в итоге. Прав ли Знайка, если:

1) конструкция — это квадрат 2×2, разбитый на 4 единичных квадрата — ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

2) конструкция — это равносторонний треугольник со стороной 2, разбитый средними линиями на 4 малых треугольники — ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

3) конструкция — это прямоугольник 3×4, разделённый на единичные квадраты, каждый из которых, в свою очередь, разделён диагональю (из левого нижнего угла в правый верхний) на две треугольные ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

4) конструкция — это куб $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков — ячеек; соседними считаются ячейки, которые имеют общую грань;

5) конструкция — это куб $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков — ячеек; соседними считаются ячейки, которые имеют или общую грань или общее ребро?

(*14 баллов*)

ТРИНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

8 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число n, обладающее следующими свойствами:

1) его запись в десятичной системе заканчивается цифрой 6 (т.е. в разряде единиц стоит цифра 6),

2) если зачеркнуть последнюю цифру 6 и перед оставшимися цифрами записать эту цифру 6, то получится число, в 4 раза большее, чем исходное. (*7 баллов*)

2. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника и всех его сторон наименьшая. (*7 баллов*)

3. В квартире почетного долгожителя Кощея Алибабаевича был прописан сам хозяин и несколько его жён. Средний возраст прописанных к моменту смерти Кощея составлял ровно 25 лет, а сразу после — ровно 24 года.

Сколько на момент смерти было жён у Кощея Алибабаевича, если он умер в возрасте 831 года? (*7 баллов*)

4. Имеется 100 правильных треугольников со стороной 1. У каждого треугольника одна сторона белая, одна сторона синяя, одна сторона – красная. Из этих треугольников составлен правильный треугольник со стороной 10, при этом каждые два соседних маленьких треугольника приложены друг к другу одноцветными сторонами. Докажите, что на границе большого треугольника белых, красных и синих отрезков одинаковое количество. (*7 баллов*)

5. Имеются шашки N цветов, причём шашек каждого цвета сколь угодно много. Двое играют в следующую игру: каждым ходом первый дает второму одну шашку, цвет которой выбирает сам, а второй помещает её в свободную клетку доски 8×8 (по своему усмотрению). Спустя 64 хода игра завершается. При этом второй стремится получить квадрат наибольшего размера (стороны квадрата параллельны сторонам доски), полностью заставленный шашками одного цвета, а первый — ему помешать. Каков наибольший размер одноцветного квадрата может при этом получится, если оба действуют наилучшим образом? Рассмотрите следующие случаи:

1. $N = 22$;
2. $N = 4$;
3. $N = 2$;
4. $N = 5$;
5. $N = 6$.

(*14 баллов*)

ТРИНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. В квадрате $ABCD$ проведены два взаимно перпендикулярных отрезка MN и PQ (M — точка на отрезке CD, N — точка на отрезке AB, P — точка на отрезке AD, Q — точка на отрезке BC, O — точка пересечения MN и PQ). Докажите, что сумма периметров четырехугольников $APON$ и $CMOQ$ равна сумме периметров четырехугольников $BQON$ и $OMDP$. (Точка O не обязательно является центром квадрата). (*7 баллов*)

2. В Партизанском крае имеется кольцевая железная дорога, на которой расположены 6 станций и вокзал. Кроме того каждая не соседняя по кольцу с вокзалом станция напрямую соединена с вокзалом отдельным железнодорожным перегоном (см. прилагаемую схему). Два партизанских отряда поочередно уничтожают один из перегонов (в начальный момент перегонов 10). Звание Гвардейского получает тот партизанский отряд, после очередной диверсии которого с одной из станций нельзя доехать до вокзала (даже через другие станции). Докажите, что начавший "рельсовую войну" отряд имеет возможность получить звание Гвардейского. (*7 баллов*)

схема ж/д путей (к задаче 2)

3. Докажите неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\ldots+\sqrt[3]{24}}}}}_{n \text{ корней}}+\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots+\sqrt{42}}}}}_{m \text{ корней}}<10.$$

(Здесь m и n — произвольные натуральные числа.) (*7 баллов*)

4. Царь решил наградить своего лучшего полководца, позволив ему вынести из царского фонда столько золота, сколько он сможет унести за один раз. Известно, что золото хранится в слитках. Веса этих слитков могут быть самые разные, но вес любого слитка не превосходят 10 кг. Также известно, что в царском фонде золота значительно больше тонны. К сожалению, полководец уже стар и не может нести более 40 кг. Какое наибольшее количество золота сможет гарантированно вынести полководец при этих условиях? (*7 баллов*)

5. Расположите на плоскости N фигур, не налегающих друг на друга так, чтобы выполнялось следующее условие:

Как бы ни покрасить эти фигуры тремя красками (каждую фигуру в один свой цвет), обязательно какие-нибудь две фигуры одного цвета будут иметь общий участок границы (одна общая точка не считается "участком"). Рассмотрите случаи:

1. $N = 4$, а фигуры — произвольные (не обязательно равные) многоугольники на Ваш выбор;
2. $N = 6$, а фигуры — квадраты произвольных (не обязательно равных) размеров;
3. $N = 4$, а фигуры — произвольные треугольники;
4. N — любое натуральное число на Ваш выбор, а фигуры — однаковые квадраты;
5. $N = 11$, а фигуры — однаковые квадраты;

(*14 баллов*)

ТРИНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

1. Существуют ли три таких числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трехчлена, то он имеет два различных положительных корня, а если в другом — два различных отрицательных? (*7 баллов*)

2. Дана неубывающая последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots$, такая, что $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$ при $n \geqslant 1$. Известно, что $b_7 = 120$. Найдите b_8. (*7 баллов*)

3. Изобретатель придумал чертёжный прибор, позволяющий поделить любой заданный отрезок на две равные части (то есть указать его середину). Можно ли используя только этот прибор и обычную линейку (без делений), разделить произвольный отрезок на три равные части? (*7 баллов*)

4. В современном футболе считается, что команда идёт по чемпионскому графику, если она выигрывает дома и играет вничью в гостях. В высшей лиге чемпионата России играют 16 команд. Турнир проводится по круговой системе в два круга (т.е. каждая команда с каждой играет дважды: один раз — в гостях, один — дома). Какое самое низкое место может занять в чемпионате России команда, идущая по чемпионскому графику? (В футболе за победу команда получает три очка, за ничью — одно, за поражение очков не получает; более высокое место занимает команда, набравшая больше очков по итогам всего турнира. В случае равенства очков у двух или более команд места между ними распределяются по дополнительным показателям, можно для простоты считать, что по жребию.) (*7 баллов*)

5. Используя знаки четырёх арифметических действий, скобки и знак модуля, напишите уравнение, множеством всех решений которого является

1) бесконечное множество точек на числовой прямой;
2) объединение двух лучей $(-\infty; -1]$ и $[1; \infty)$ числовой прямой;
3) объединение отрезков $[0; 1]$ и $[3; 5]$ числовой прямой;
4) квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ плоскости xOy;
5) граница квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$ плоскости xOy.

(В пунктах 4 и 5 требуется составить уравнение от двух переменных: x и y. Приводить решения полученных уравнений не требуется.) (*14 баллов*)

ТРИНАДЦАТАЯ ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

1. На доске начерчен выпуклый четырехугольник. Наташа утверждает, что его можно разрезать диагональю на два остроугольных треугольника, Маша — что его можно разрезать на два прямоугольных треугольника, а Аника — что на два тупоугольных треугольника. Оказалось, что ровно одна девочка не права. Про кого из девочек можно наверняка утверждать, что она права? (*7 баллов*)

2. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, d, лежащих на отрезке $[-1;\,1]$, выполнено неравенство $|ac + ad + bc - bd| \leqslant 2$. (*7 баллов*)

3. Пусть дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что в ней либо существует бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо существует бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему. (*7 баллов*)

4. В квадрате $ABCD$ точка M лежит на стороне AB, а точка N — на стороне CD. P — точка пересечения отрезков CM и BN, а точка Q — точка пересечения отрезков MD и AN. Докажите, что отрезок PQ не меньше половины стороны квадрата. (*7 баллов*)

5. Инопланетянин Z живёт в двухмерном мире, то есть в плоскости. Однажды Z решил позагорать. Z хочет, чтобы каждая точка на границе его тела была освещена лучами не меньше 1 минуты. При этом Z может вертеться в плоскости как угодно, а лучи света распространяются внутри плоскости параллельно оси OX и в том же направлении, что и ось. Точка поверхности тела считается освещённой, если на неё не падает тень ни от какой другой точки тела инопланетянина.

1. Докажите, что если Z имеет форму квадрата, то он не сможет загореть быстрее, чем за 2 минуты;

2. Докажите, что если Z имеет форму треугольника, то он не сможет загореть быстрее, чем за 1,5 минуты.

3. Сможет ли Z загореть быстрее, чем за 2 минуты, если Z — сектор круга с тупым центральным углом α?

4. Верно ли, что если Z имеет форму выпуклого четырёхугольника, то он не сможет загореть быстрее, чем за 1.5 минуты?

5. Верно ли, что если Z имеет форму выпуклого n-угольника ($n > 4$), то он не сможет загореть быстрее, чем за 1.5 минуты?

(*14 баллов*)

РЕШЕНИЯ
5 — 6 класс

1. *Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать десятиугольник, у которого все стороны располагаются ровно на пяти прямых. Не завирает ли барон?*

Барон Мюнхгаузен — самый честный человек. Не врёт он и на этот раз — см. рисунок.

к решению задачи 1

Ответ: Не завирает.

2. *Буржуины заплатили несколько долларов Плохишу за то, чтобы он предал Мальчиша-Кибальчиша. Плохиш хочет купить на них варенье, печенье и конфеты. Если он купит только банку варенья, то у него останется три доллара, если только корзину печенья — то четыре доллара, а если только коробку конфет, то останется восемь долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить банку варенья и корзину печенья?*

Способ первый. Предположим, что денег у Плохиша хватит. Так как после покупки банки варенья у него остаётся три доллара, то корзина печенья стоит не дороже трёх долларов. Так как при покупке только корзины печенья у Плохиша остаётся ровно 4 доллара, то изначально у него было не больше 4+3=7 долларов. Но по условию у него было денег на коробку конфет и ещё 8 долларов — противоречие. Значит, сделанное предположение ошибочно. Таким образом, у Плохиша денег на банку варенья и корзину печенья не хватит.

Способ второй. Пусть у Плохиша имеется x долларов, а банка варенья, корзина печенья и коробка конфет стоят a, b и c долларов соответственно. Тогда $x = a + 3 = b + 4 = c + 8$. Все цены положительны, поэтому $x = c + 8 \geqslant 8$. Так как $a = x - 3$ и $b = x - 4$, то $a + b - x = x - 7 \geqslant 8 - 7 = 1 > 0$. Полученное неравенство означает, что суммарная стоимость варенья и печенья больше, чем количество денег у Плохиша.

Ответ: Не хватит.

3. *Агентство науки и дошкольного образования решило начать подготовку к ЕГЭ с групп одного детского сада (всего в саду 250 малышей). Каждый малыш должен построить один вертикальный столбик высотой 5 кубиков из одинаковых кубиков трех цветов: красного, синего и белого. Чиновники требуют, чтобы среди этих 250 столбиков не было двух одинаковых. Смогут ли воспитатели детского сада (или родители) помочь детям выполнить приказ сверху?*

Подсчитаем количество разных столбиков, которые могут получиться. Нижний кубик может быть любого из трёх цветов — три варианта. В каждом из них второй кубик снизу также может быть любого из трёх цветов, значит, в каждом из этих вариантов образуются три разных столбика высоты два, а всего таких столбиков $3 \times 3 = 9$. Аналогично, различных столбиков высоты 3 будет $9 \times 3 = 27$, высоты 4 — $27 \times 3 = 81$ и высоты 5 — $81 \times 3 = 243$. Таким образом, создать более 243 разных столбиков невозможно в принципе; приказ сверху невыполним.

Примечание. Конструкция, описанная в задаче, в комбинаторике называется размещением с повторениями из 3 по 5. Количество таких размещений обозначают $\overline{A}_3^5$. В комбинаторике доказывается формула $\overline{A}_n^m = n^m$.

Ответ: Не смогут.

4. *Больному требуется наложить компресс и держать его ровно 20 минут. Как их отмерить, имея только двое песочных часов: одни на 9 минут, вторые — на 7 минут?*

Способ первый. До какого-нибудь правильного алгоритма догадаться нетрудно. Покажем, как можно находить такие алгоритмы в общем случае.

Пусть мы первернём 9-минутные часы a раз, а 7-минутные b раз (числа a и b — целые, неотрицательные). Тогда по первым часам пройдёт $9a$ минут, а по вторым $7b$ минут. Нам надо, чтобы выполнилось одно из трёх условий:

первое: $9a + 7b = 20$ — в этом случае мы можем сперва отмерять время по одним часам, а затем по другим.

второе: $9a - 7b = 20$ — в этом случае мы запустим часы одновременно, начнём процесс варки, когда пройдёт $7b$ минут (отмерив это время по 7-минутным часам) и окончим, когда пройдёт $9a$ минут (это время отмерим по 9-минутным часам).

третье: $7b - 9a = 20$ — процесс организуется аналогично предыдущему.

Таким образом, нужно найти хотя бы одно решение любого из трёх приведённых уравнений (в натуральных числах). Для небольших коэффициентов (как в нашем случае) это проще всего сделать перебором (в общем случае перебор может оказаться громоздок, и тогда лучше применять теорию диофантовых уравнений). Мы быстро увидим, что первое условие невыполнимо, второе достигается при $a = 3$, $b = 1$, а третье при $a = 4$, $b = 8$. (На самом деле натуральных решений в обоих случаях бесконечное количество.) Достаточно взять любой из ответов.

Способ второй. Наложим больному компресс и одновременно превернём обои часы. Как только песок высыпется из семиминутных, перевернём их. Дождёмся, пока песок высыпется из девятиминутных. Сейчас компресс стоит 9 минут ровно, а в семиминутных осталось песка на 5 минут, значит пересыпалось ровно на две минуты. Перевенём семиминутные, а девятиминуные оставим в покое. Как только песок высыпется из семиминутных часов (значит, прошло $9+2 = 11$ минут с начала процедуры), перевернём девятиминутные. Как только песок высыпется из них, компресс снимаем.

Второй способ, в отличие от первого, позволяет начать постановку компресса в любое время, в то время, как при первом способе предварительно приходится ждать, пока часы не придут в нужное нам положение.

Ответ: Например, так: одновременно перевернуть и те, и другие часы, как только песок полностью высыпется из 7-минутных наложить компресс и держать его до тех пор, пока песок из 9-минутных часов не высыпется полностью три раза.

к задаче 5

5. *Можно ли копиями плитки, изображённой на рисунке (A, B, M, N — некоторые положительные числа), замостить (т.е. покрыть без наложений) всю плоскость, если плитки можно поворачивать на любой угол и даже переворачивать? Решите задачу в следующих случаях:*

1. $A = B = 2$, $M = N = 1$.

2. $A = 2014$, $B = 2$, $M = 2011$, $N = 1$.

3. $A = 5$, $B = 3$, $M = 1$, $N = 1$.

4. $A \geqslant 2$ *и* $B \geqslant 2$ *— произвольные целые числа,* $M = 1$, $N = B - 1$.

5. A, B, M, N *— произвольные положительные числа (не обязательно целые),* $M < A$, $N < B$.

Заметим, что положительный ответ на случай 5 автоматически означает положительный ответ на все остальные случаи. Покажем, как замостить плоскость в этом последнем

Первый способ. Сперва составим бесконечную цепочку из плиток, вставляя последовательно одну плитку в выем другой, как на рисунке слева. Теперь этими бесконечными в обе стороны цепочками замостим плоскость.

к решению задачи 5. Первый способ

Второй способ. Повернём одну из плиток на 180° и зацепим с другой плиткой; парами так зацепленных плиток замостим бесконечную в обе стороны "полосу" плоскости (как на левом рисунке). Такими полосами замостим плоскость — см. рисунок справа.

к решению задачи 5. Второй способ

Ответ: Можно во всех случаях.

РЕШЕНИЯ
7 класс

1. *Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и Винни-Пух пошел по прямой к дому Кристофера Робина, а Пятачок — к пчелиному дуплу (тоже по прямой). Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились, причём ни тот, ни другой не успели дойти до первоначальной цели. Сколько времени могло продолжаться их путешествие (с момента выхода из дома до встречи)? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время.*

Первый способ. Пусть с момента выхода из дома и до встречи прошло a часов. Тогда Винни прошёл $3a$ км, а Пятачок — $4a$ км. Обозначим буквами A, B и C соответственно дома Винни, Пятачка и точку встречи. Имеем, $AB = 1$, $AC = 3a$ и $BC = 4a$. В силу неравенства треугольника имеем $1 + 3a \geqslant 4a$, $1 + 4a \geqslant 3a$ и $3a + 4a \geqslant 1$. (Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда одна из точек лежит на отрезке с концами в двух других точках.) Из приведённых трёх неравенств второе выполняется всегда, а первое и третье приводятся равносильными преобразованиями к виду $a \leqslant 1$ и $a \geqslant 1/7$. Оба эти значения достижимы: они возникают, когда дома Винни-Пуха, Пятачка, Кристофера Робина и Пчелиное Дупло лежат на одной прямой, при этом при $a = 1/7$ Пятачок и Винни идут навстречу друг другу, а при $a = 1$ они идут в одну сторону (Пятачок догоняет Винни-Пуха).

Второй способ. Так как скорости обоих персонажей Милна постоянны, наиболее быстро они встретятся тогда, когда пойдут навстречу друг другу. В этом случае они будут сближаться со скоростью $4 + 3 = 7$ км/ч, и расстояние в один км пройдут за $1/7$ часа. Аналогично, максимальное время до встречи пройдёт, если более быстрый Пятачок будет догонять уходящего от него более медлительного Винни-Пуха. В этом случае скорость сближения будет $4 - 3 = 1$ км/ч, и изначальную фору в 1 км Пятачок отыграет за 1 час ровно.

Ответ: Наименьшее время — $1/7$ часа, наибольшее — 1 час.

2. *По лыжне кольцевого маршрута с постоянными скоростями бегут Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а Старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой — каждые 3 минуты. Через сколько минут крокодил Гена обгоняет Чебурашку?*

Первый способ. Будем смотреть на дистанцию глазами Шапокляк. Тогда сама Шапокляк стоит на месте, просто Гена и Чебурашка бегут быстрее (скорость каждого увеличилась на скорость старухи). Зафиксируем произвольный момент времени, и посмотрим, что произойдёт через 6 минут. Ясно, что за это время Гена пробежит 3 полных круга, а Чебурашка — 2, т.е. Гена обгонит Чебурашку ровно на 1 круг. Это означает, что Гена догоняет Чебурашку как раз за 6 минут ровно.

Второй способ. Заметим, что время, проходящее между встречами любых двоих из трёх героев Успенского не зависит от того в какой точке трассы находился каждый из них в начале движения, поэтому без ограничения общности можно полагать, что все они начали бег из одной точки трассы. Спустя 6 минут от начала движения Шапокляк встретила в третий раз Крокодила и во второй — Чебурашку. Это значит, что все герои опять в одной точке трассы, но Гена пробежал на один круг больше Чебурашки. Значит, он его только что догнал в первый раз, и, следовательно, он догоняет Чебурашку ровно за 6 минут.

Третий способ. Пусть длина трассы l (например, километров), скорости Гены, Чебуминуты Шапокляк пробежит $2s$ километров, а Гена $2g$. Так как в сумме они пробегут круг, имеем уравнение $2s + 2g = l$. Аналогично, сравнивая скорости Шапокляк и Чебурашки, получим $3s + 3c = l$. Исключим из системы скорость Шапокляк (для чего можно, например, умножить первое уравнение на -3, второе — на 2, а затем почленно их сложить). Получим $6(g - c) = l$, т.е. за 6 минут Гена пробегает на l км, или на 1 круг больше, чем Чебурашка. Это означает, что обгон Чебурашки Крокодилом Геной происходит один раз в 6 минут.

Ответ: За 6 минут.

3. *На доске записано 2013 натуральных чисел. Докажите, что одно из них можно стереть так, чтобы сумма оставшихся чисел была чётной.*

Первый способ. Если все записанные числа одной чётности — сотрём любое из них. Останется чётное количество чисел. Разобьём их на пары произвольным образом; сумма чисел в каждой паре чётна, общая сумма тоже чётна. Если же среди написанных чисел есть числа разной чётности, то подсчитаем общую сумму чисел. если эта сумма чётна — зачеркнём любое чётное число, если нечётна — любое нечётное. Во всех случаях сумма оставшихся чисел чётна.

Второй способ. Нам необходимо оставить чётное количество нечётных чисел. Если таких изначально нечётно — зачеркнём любое из них. Пусть нечётных чисел уже чётно. Тогда (так как всего чисел нечётное количество) в наборе есть хотя бы одно чётное число. Зачеркнём его — цель достигнута.

4. *Жили-были дед да баба, ели кашу с молоком … из одной тарелки. Начали они есть кашу одновременно, на разговоры не отвлекались. Если бы дед ел со скоростью бабы, то кашу они ели бы на 3 минуты дольше, а если бы наоборот, баба ела со скоростью деда, то кашу съели бы на 2 минуты быстрее. Определите, за какое время дед и баба съели кашу.*

Первый способ. Пусть дед ест кашу со скоростью d тарелок в минуту, баба — со скоростью b тарелок в минуту, а длительность обеда деда и бабы составляет t минут. (Все переменные — положительные, не обязательно целые числа.) Тогда имеем систему $\begin{cases} (d+b)\cdot t &= 1 \\ (b+b)\cdot(t+3) &= 1 \\ (d+d)\cdot(t-2) &= 1 \end{cases}$. Эту систему можно решать по-разному; проще всего выразить из второго уравнения b, из третьего — d, подставить полученные выражения в первое уравнение и решить получившееся дробно-рациональное уравнение. Если при решении хочется избежать дробно-рациональных уравнений, можно поступить так: сложим второе уравнение с третьим, получим $2(b+d)t + 6b - 4d = 2$, откуда, учитывая равенство $(b+d)t = 1$, получаем $d = 1,5b$. Теперь первое уравнение принимает вид $2,5bt = 1$, а второе (после раскрытия скобок) $2bt + 6b = 1$, откуда $\dfrac{2}{2,5} + 6b = 1$ и $b = \dfrac{1}{30}$. Тогда $t = \dfrac{1}{2,5b} = 12$.

Второй способ. Из условия ясно, что дед ест быстрее бабы. Заменим деда на двух персонажей, ещё одну бабу и внука так, что эти двое в сумме съедают столько же каши в единицу времени, сколько один дед. Пусть две бабы и два внука съедают всю кашу за время t; назовём количество каши, съеденной за это время одним внуком, *порцией*. Пусть теперь кашу едят только две бабы. Тогда спустя время t в тарелке останутся ровно две порции, которые две бабы съедят по условию за 5 минут. Значит, одну порцию бабы будут есть 2,5 минуты, а за 2 минуты вдвоём съедят $2 : 2,5 = 0,8$ порций. Теперь пусть едят внук и две бабы. Через t минут в тарелке останется 1 порция, которую две бабы и внук минуты съедает $0,2$ порции. Тогда одну порцию он съедает за время $2 \cdot (1 : 0,2) = 10$ мин. Это и есть время t. А искомое время равно $t + 2 = 12$.

Ответ: Деда и баба съели кашу за 12 минут.

5. *Знайка выдал Незнайке некую конструкцию, составленную из пустых ячеек. Незнайка заполняет ячейки камушками по следующему правилу: каждым ходом он выбирает одну из незаполненных ячеек и кладет в неё на один камушек больше, чем количество соседних ячеек, в которых уже есть камни (в частности, первым ходом он кладёт один камень в некоторую пустую ячейку). Незнайка действует так до тех пор, пока в конструкции есть хотя бы одна пустая ячейка. Знайке неизвестно, в каком порядке Незнайка будет заполнять ячейки. Тем не менее, он утверждает, что знает сколько всего камней окажется в конструкции в итоге. Прав ли Знайка, если:*

1) конструкция — это квадрат 2×2, разбитый на 4 единичных квадрата — ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

2) конструкция — это равносторонний треугольник со стороной 2, разбитый средними линиями на 4 малых треугольники — ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

3) конструкция — это прямоугольник 3×4, разделённый на единичные квадраты, каждый из которых, в свою очередь, разделён диагональю (из левого нижнего угла в правый верхний) на две треугольные ячейки; соседними считаются ячейки, которые имеют общую сторону;

4) конструкция — это куб $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков — ячеек; соседними считаются ячейки, которые имеют общую грань;

5) конструкция — это куб $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков — ячеек; соседними считаются ячейки, которые имеют или общую грань или общее ребро?

Первый способ. Первые два случая можно решить простым перебором. Например, в пункте 1) после первого хода в одной ячейке будет один камень, в остальных пусто. Если второй ход делается в противоположную (не смежную) ячейку, то после второго хода в двух ячейках будет по камню, а две другие будут пусты. В этом случае последними ходами Незнайка положит в эти ячейки по 3 камня и в итоге использует 8 камней. Если же второй ход делается в смежную ячейку, то после второго хода в одной ячейке 1 камень, в смежной 2, а остальные пусты. Третьим ходом в одну из пустых ячеек кладётся 2 камня, последним в оставшуюся ячейку 3 — тоже 8 ходов. В этом случае Знайка прав.

Пункт 2 рассматривается аналогично. Знайка снова прав: Незнайке потребуется 7 камней независимо от порядка действий.

Полный перебор последующих случаев громоздок. Решим задачу в общем виде. Для этого будем считать, что Незнайка кладёт в каждую ячейку ровно один камень, а остальные камни туда подкладывают сами соседние заполненные ячейки. Считаем, что такое "подкладывание" осуществляется через границу между ячейками. В пунктах с 1 по 4 всякая граница между ячейками соединяет ровно две ячейки, поэтому через неё будет подложен ровно один камень. Значит, общее число камней будет равно числу ячеек плюс число границ, а это число не зависит от порядка действий Незнайки. В этих случаях Знайка прав.

Последний пункт чуть сложнее. Здесь границы бывают двух видов: единичные квадраты и единичные отрезки (можно подсчитать, что квадратов 54, отрезков 36). Рассуждаем как в предыдущем случае, при этом считаем, что "подкладывание" осуществляется через общую грань, а если таковой нет, то через общее ребро. Тогда по-прежнему через границы-квадратики будет положено по 1 камню, а через границы-рёбра — по 2. Значит, общее число камней опять-таки не зависит от порядка и равно $27+54+2\cdot 36=153$. Знайка снова прав.

Второй способ. Поставим в соответствие конструкции, предложенной Знайкой, граф. Его вершинами пусть будут ячейки, а рёбрами соединены соседние ячейки. Считаем, что каждым ходом Незнайка закрашивает вершину (кладёт 1 камень в соответствующую ячейку) и все рёбра, соединяющие её с уже закрашенными (кладёт в ячейку ещё столько камней, сколько соседних с ней ячеек непусты). Тогда к концу процесса граф будет целиком окрашен, а количество окрашиваний (сиречь количество положенных камней) в точности равно числу вершин графа плюс число его рёбер.

Ответ: Знайка прав во всех шести случаях.

РЕШЕНИЯ
8 класс

1. *Найдите наименьшее натуральное число n, обладающее следующими свойствами:*

1) его запись в десятичной системе заканчивается цифрой 6 (т.е. в разряде единиц стоит цифра 6),

2) если зачеркнуть последнюю цифру 6 и перед оставшимися цифрами записать эту цифру 6, то получится число, в 4 раза большее, чем исходное.

Первый способ. Пусть n какое-то из натуральных чисел обладающих свойствами из условия задачи. Из первого свойства его можно представить в виде $n = 10m + 6$ для некоторого целого неотрицательного числа m. Поскольку число 6 не подходит, то m — натуральное число, пусть оно имеет k цифр в десятичной записи. Понятно, что число n тем меньше, чем меньше m, в частности n будет наименьшим при наименьшем из возможных k.

Теперь из второго свойства $6 \cdot 10^{k+1} + m = 4n$, откуда $6 \cdot 10^{k+1} + m = 40m + 24$, то есть $6 \cdot 10^{k+1} - 24 = 39m$, и число $6 \cdot 10^{k+1}$ имеет остаток 24 от деления на 39.

Считаем остатки.

6 имеет остаток 6 при делении на 39,
60 имеет остаток 21 при делении на 39,
600 имеет остаток $210\, mod\, 39 = 15$ при делении на 39,
6000 имеет остаток $150\, mod\, 39 = -6\, mod\, 39 = 33$ при делении на 39,
60000 имеет остаток $-60\, mod\, 39 = -21\, mod\, 39 = 18$ при делении на 39,
600000 имеет остаток $-210\, mod\, 39 = -15\, mod\, 39 = 24$ при делении на 39.

Итак, раньше чем у $600000 = 6 \cdot 10^5$ остатка 24 от деления на 39 среди чисел вида $6 \cdot 10^{k+1}$ нет. То есть чисел n с меньшим числом k, чем $k = 4$ просто нет. При $k = 4$ имеем $600000 = 39m + 24$, откуда $m = 15384$, $n = 153846$. Поскольку других n с таким k нет, мы нашли наименьшее n.

Примечание. На самом деле достаточно было написать число $600\ldots$ и начинать его делить столбиком до тех пор пока очередной остаток не стал бы равным 24. Последовательность получившихся остатков совпадёт с получившейся выше, а в качестве частичного частного мы бы как раз получили число 15384.

Второй способ. Пусть исходное число — это $\overline{a_1a_2\ldots a_k6}$. Тогда после зачёркивания последней цифры заданного числа и приписывания этой цифры слева, получилось число $\overline{6a_1a_2\ldots a_k}$. Это же число получается при умножении на 4 исходного числа. Произведём умножение "столбиком": $\begin{array}{r} a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k6 \\ 4 \\ \hline 6a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k \end{array}$. Тогда $a_k = 4$ (самый правый столбец), т.е. цифра десятков исходного числа — это 4. Далее, $a_{k-1} = 8$ (предпоследний столбец), а это — цифра сотен исходного числа и т.д. Процесс может завершиться только в том случае, когда очередная цифра a_i станет равна 6. Впервые такая возможность возникает на индексе $k = 5$, когда мы получим равенство $153846 \cdot 4 = 615384$. Наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи найдено.

Ответ: 153846.

2. *Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника и всех его сторон наименьшая.*

Отметим, что поскольку точка внутри остроугольного треугольника, то можно не различать расстояния от неё до стороны, и от неё до прямой, содержащей эту сторону.

Рассмотрим произвольную точку O в треугольнике, выберем в треугольнике какую-либо вершину и противоположную к этой вершине сторону. Пусть это будут вершина C и сторона AB соответственно. Пусть также CC' — высота треугольника, а точка H – основание перпендикуляра, опущенного из O на AB (см. рисунок). В силу неравенства треугольника $CO + OH \geqslant CH$, но H лежит на AB следовательно $CH \geqslant CC'$. Таким образом, $OH + HC \geqslant CC'$. Более того, поскольку $CO + OH = CH = CC'$ только в случае если все точки на одной прямой, показано, что данное равенство возможно только если O лежит на высоте CC'.

к решению задачи 1

Таким образом, для всякой точки внутри ABC сумма расстояния от неё до вершины C и расстояния от неё до стороны AB не больше длины высоты CC', и равно ей только если O лежит на этой высоте.

Аналогичные утверждения имеют место относительно вершины B и стороны AC, а также вершины C и стороны AB.

Складывая все три неравенства, получаем, что искомая сумма не меньше суммы высот треугольника и равна ей если и только если точка лежит на всех трёх высотах. Следовательно искомая точка — точка пересечения высот треугольника.

Ответ: Искомая точка — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника.

3. *В квартире почетного долгожителя Кощея Алибабаевича был прописан сам хозяин и несколько его жён. Средний возраст прописанных к моменту смерти Кощея составлял ровно 25 лет, а сразу после — ровно 24 года.*

Сколько на момент смерти было жён у Кощея Алибабаевича, если он умер в возрасте 831 года?

Пусть у Кощея было n жён, сумма возрастов которых a лет. Тогда средний возраст прописанных к моменту смерти равен $\dfrac{a+831}{n+1}$, а сразу после смерти $\dfrac{a}{n}$. Из системы $\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{a+831}{n+1} & = & 25\\ \dfrac{a}{n} & = & 24\end{array}\right.$ получаем, $a = 24n$ и $\dfrac{24n+831}{n+1} = 25$, откуда $n = 806$.

Ответ: 806 жён.

4. *Имеется* 100 *правильных треугольников со стороной* 1. *У каждого треугольника одна сторона белая, одна сторона синяя, одна сторона – красная. Из этих треугольников составлен правильный треугольник со стороной* 10, *при этом каждые два соседних маленьких треугольника приложены друг к другу одноцветными сторонами. Докажите, что на границе большого треугольника белых, красных и синих отрезков одинаковое количество.*

Будем для краткости называть границы маленьких треугольников кусочками. В составленном треугольнике этих кусочков ровно $3 \cdot 100 = 300$, по 100 каждого цвета; из них 30 внешние (лежат на границе составленного треугольника), а остальные — внутренние (лежат внутри), совмещённые попарно. Достаточно показать, что внутренних кусочков каждого из цветов поровну. Для этого закрасим некоторые малые треугольники в чёрный цвет, так, чтобы образовалась “шахматная” раскраска (см. рисунок). Заметим, что каждый внутренний кусочек принадлежит ровно одному чёрному

к решению задачи 2

у каждого чёрного треугольника ровно одна сторона белая, одна синяя, и одна — красная, поэтому на его границе ровно по два внутренних кусочка каждого из цветов. Значит, внутренних кусочков каждого цвета поровну.

5. *Имеются шашки N цветов, причём шашек каждого цвета сколь угодно много. Двое играют в следующую игру: каждым ходом первый дает второму одну шашку, цвет которой выбирает сам, а второй помещает её в свободную клетку доски 8×8 (по своему усмотрению). Спустя 64 хода игра завершается. При этом второй стремится получить квадрат наибольшего размера (стороны квадрата параллельны сторонам доски), полностью заставленный шашками одного цвета, а первый — ему помешать. Каков наибольший размер одноцветного квадрата может при этом получится, если оба действуют наилучшим образом? Рассмотрите следующие случаи:*

1. $N = 22$*;*
2. $N = 4$*;*
3. $N = 2$*;*
4. $N = 5$*;*
5. $N = 6$.

1. Квадрат 1×1 получается всегда. Для получения одноцветного квадрата со стороной 2 (тем более, большего размера) нужно иметь 4 шашки одного цвета. Но первый игрок имеет возможность дать не более трёх шашек каждого цвета ($3 \cdot 22 = 66$, а полей всего 64), значит, может не позволить второму получит такой квадрат.

2. Если первый даст второму игроку по 16 шашек каждого из цветов, то одноцветного квадрата со стороной, большей 4, получиться не может. Покажем, как второй игрок может гарантировать получение квадрата 4×4. Для этого ему достаточно разделить доску средними линиями на 4 равных квадрата, приписать каждому квадрату свой цвет (из четырёх имеющихся) и ставить каждую шашку на свободную клетку квадрата, цвет которого совпадает с цветом данной шашки (до тех пор, пока это возможно). Если указанное действие стало невозможным, то квадрат данного цвета уже заполнен одноцветными шашками. Если действие может быть осуществлено все 64 хода, то все 4 квадрата окажутся заполненными одноцветными шашками.

к решению задачи 5. Случай $N = 5$.

3. Второй может гарантировать получение квадрата 4×4 действиями, описанными в предыдущем пункте. Покажем, как следует действовать первому, чтобы не позволить второму получить квадрат большего размера. Ему для этого следует давать шашки произвольно до тех пор, пока второй не положит шашку в одну из четырёх центральных клеток (можно дождаться пока таких шашек не будет положено 3 штуки, а можно этого и не делать). Далее следует давать только шашки другого цвета (отличного от цвета положенной в центр шашки). Тогда в среднем квадрате 2×2 будут шашки обоих цветов. Так как всякий квадрат размера 5×5 или более содержит все 4 центральные клетки, он не может состоять из шашек одного цвета. Первый добился своей цели.

4. Если первый даст по 15 шашек четырёх цветов и 4 шашки пятого (порядок не важен), одноцветного квадрата 4×4 заведомо не возникнет. Покажем, как второй может гарантировать получение одноцветного квадрата 3×3. Для этого он выделяет в углах доски четыре восьмиклеточных сектора, резервируя каждый под один из пяти имеющихся цветов (см. рисунок). Первые 8 шашек этих четырёх цветов заполняют соответствующий сектор, девятая шашка этого цвета (если будет дана) дополнит сектор до одноцветного квадрата. Первые 28 шашек пятого цвета второй ставит на свободные поля вне этих сек-

постановка её на любое помеченное крестиком полей гарантирует получение квадрата 3×3 пятого цвета. Не позже, чем по получении 61-ой шашки возникнет одноцветный квадрат 3×3.

5. Квадрата со стороной 4 (или более) возникнуть не может, если первый в любом порядке даст не больше 15 шашек каждого цвета (Это возможно, так как $15 \cdot 6 > 64$). Покажем, как второй может гарантировать получение одноцветного квадрата 3×3. Для этого он выделяет 6 восьмиклеточных зон на доске так, как показано на рисунке, каждой из зон приписывает один из шести цветов и шашками каждого из цветов в первую очередь заполняет зону соответствующего цвета. Девятая по счёту шашка любого из цветов позволяет второму получить квадрат 3×3.

к решению задачи 5. Случай $N = 6$.

Ответ: 1) 1×1; 2) 4×4; 3) 4×4; 4) 3×3; 5) 3×3.

РЕШЕНИЯ
9 класс

1. *В квадрате $ABCD$ проведены два взаимно перпендикулярных отрезка MN и PQ (M — точка на отрезке CD, N — точка на отрезке AB, P — точка на отрезке AD, Q — точка на отрезке BC, O — точка пересечения MN и PQ). Докажите, что сумма периметров четырехугольников $APON$ и $CMOQ$ равна сумме периметров четырехугольников $BQON$ и $OMDP$. (Точка O не обязательно является центром квадрата).*

к решению задачи 1

Заметим, что отрезки NO, MO, PO и QO входят по разу как в сумму периметров четырёхугольников $APON$ и $CMOQ$, так и в сумму периметров четырёхугольников $BQON$ и $OMDP$. Таким образом, достаточно доказать равенство $BQ + BN + MD + DP = QC + CM + NA + AP$. Для этого проведём через точки N и Q прямые, параллельные сторонам квадрата; пусть они пересекают стороны CD и AD в точках N_1 и Q_1 соответственно (см. рисунок). Эти прямые разбивают квадрат на 4 прямоугольника; без ограничения общности можно полагать, что точка O лежит в прямоугольнике, содержащем угол C. Тогда точка Q_1 лежит на отрезке DP, а точка M лежит на отрезке CN_1. Углы QPQ_1 и QPD — смежные, и их сумма равна $180°$. В четырёхугольнике $MOPD$ два прямых угла, поэтому сумма двух других, а именно углов NMD и QPD, также равна $180°$. Значит, $\angle QPQ_1 = \angle NMN_1$. Тогда треугольники QPQ_1 и NMN_1 равны по катету и острому углу, откуда $N_1M = Q_1P$. Далее, $BQ = AQ_1$, $Q = Q_1D$, $NA = N_1D$ и $BN = CN_1$, поэтому

$$BQ + BN + MD + DP = AQ_1 + CN_1 + (DN_1 + N_1M) + (DQ_1 - Q_1P) =$$

$$= (AQ_1 + N_1M) + DN_1 + (CN_1 - Q_1P) + DQ_1 = (AQ_1 + Q_1P) + AN + (CN_1 - N_1M) + CQ =$$

$$= AP + AN + CM + CQ,$$

что и требуется доказать.

2. *В Партизанском крае имеется кольцевая железная дорога, на которой расположены 6 станций и вокзал. Кроме того каждая не соседняя по кольцу с вокзалом станция напрямую соединена с вокзалом отдельным железнодорожным перегоном (см. прилагаемую схему). Два партизанских отряда поочередно уничтожают один из перегонов (в начальный момент перегонов 10). Звание Гвардейского получает тот партизанский отряд, после очередной диверсии которого с одной из станций нельзя доехать до вокзала (даже через другие станции). Докажите, что начавший "рельсовую войну" отряд имеет возможность получить звание Гвардейского.*

схема ж/д путей
(к задаче 2)

Первый способ. Поставим, двигаясь по кольцу, всем семи пунктам следующие ярлычки: вокзал наречём B, последующие станции — 1_Λ, 2_Λ,3_Λ,затем 3_Π,2_Π, 1_Π — см. риунок.

Будем говорить, что:

— сеть *симметричная*, если после того как поменять индексы Λ на Π, а Π на Λ, сеть железных дорог не изменится;

— сеть *почти симметричная*, если от симметричной она отличается в точности одним перегоном;

— станция сети *почти отрезана*, если она соединена с вокзалом ровно одним маршрутом.

— сеть *почти победная*, если в ней имеется хоть одна почти отрезанная станция.

Заметим, что если в сети нет перегонов вида $n_{\Lambda}n_{\Pi}$, то

1) всякая симметричная сеть имеет четное число почти отрезанных станций;

2) всякая почти симметричная сеть может быть превращена в симметричную уничтожением одного перегона;

3) если при таком превращении почти симметричная сеть не имела почти отрезанных станций, то их не имеет и полученная симметричная.

Начавший рельсовую войну отряд (первый отряд) имеет следующую выигрышную стратегию:

сначала уничтожить перегон 3_{Λ} и 3_{Π} (тем самым получив симметричную сеть); далее, после каждого хода соперника, проверять почти победная сеть или нет.

Если сеть почти победная, то он имеет возможность уничтожить перегон на последнем маршруте, соединяющем вокзал с почти отрезанной станцией. Если сеть не победная, то по пункту 2) он имеет возможность восстановить симметрию предоставляя сопернику симметричную сеть (которая по пункту 3 не является почти победной).

Приведенный алгоритм осуществим, достаточно доказать, что первый отряд всегда сможет восстановить симметрию. Действительно, он подает второму симметричную сеть, в которой нет перегонов вида $n_{\Lambda}n_{\Pi}$. После этого второй отряд вынужден нарушить симметрию, и создает почти симметричную сеть, в которой по прежнему нет перегонов вида $n_{\Lambda}n_{\Pi}$.. Но тогда симметрию можно восстановить по пункту 2), и алгоритм осуществим.

Более того, в силу пункта 3), сопернику ни в какой момент времени не может достаться почти победная сеть, тогда и стать Гвардейским второй отряд не сможет.

Поскольку количество перегонов конечно, то диверсии рано или поздно кончатся, и один из отрядов получит-таки звание Гвардейского. Так как при реализации первым отрядом указанного алгоритма второй отряд стать Гвардейским не может, Гвардейским станет первый отряд.

Второй способ (или другое описание первого способа). Поставим себя на место командира того партизанского отряда, который первым уничтожает перегон. Будем действовать так: отсчитаем по кольцу от вокзала три станции и уничтожим кольцевой перегон между этой и следующей станцией. Видим, что пока наш отряд не получит звания гвардейского, но и второй отряд его не получит, какой бы перегон он не уничтожил. Более того, структура уцелевших перегонов симметрична относительно некой воображаемой прямой — на схеме мы её изобразим пунктиром. Ясно, что действия второго отряда нарушат симметрию. Тогда мы (если пожелаем) эту симметрию можем восстановить, уничтожив перегон, симметричный тому, который уничтожил второй отряд. Мы это сделаем если и только если не можем своей диверсией полностью нарушить сообщение вокзала с какой-нибудь из станций, если же можем — нарушаем это сообщение и получаем звание гвардейского. Так как количество перегонов после каждой диверсии уменьшается на один, рано или поздно какой-то из отрядов (причём только один) звание гвардейского получит. Остаётся проверить, что это будет именно наш отряд. Предположим, что это не так, и второму отряду удалось своей диверсией добиться того, что нарушилось сообщение между вокзалом и некоторой станцией. Тогда (в силу симметрии), тот же результат получился бы, если бы второй отряд уничтожил симметричный перегон. Своей диверсией накануне мы уничтожили перегон в одной из симметричных частей, на связь вокзала со станциями другой части наша диверсия никак не влияет, поэтому если бы мы предыдущим действием уничтожили рассматриваемый перегон в этой другой части, связь некоторой станции с вокзалом также была бы нарушена. А это значит, что мы действовали не по описанной

схема ж/д путей
(к задаче 2)

3. *Докажите неравенство*

$$\underbrace{\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\ldots+\sqrt[3]{24}}}}}_{n\text{ корней}}+\underbrace{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots+\sqrt{42}}}}}_{m\text{ корней}}<10.$$

(Здесь m и n — произвольные натуральные числа.)

Так как $\sqrt[3]{24+3}=3$, имеем последовательно $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+3}}=3$, $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+3}}}=3$, $\ldots$, поэтому первое слагаемое левой части неравенства строго меньше 3.

Аналогично, $\sqrt{42+7}=7$, $\sqrt{42+\sqrt{42+7}}=7$, $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+7}}}=7$, $\ldots$, значит второе слагаемое левой части неравенства строго меньше 7. Неравенство доказано.

4. *Царь решил наградить своего лучшего полководца, позволив ему вынести из царского фонда столько золота, сколько он сможет унести за один раз. Известно, что золото хранится в слитках. Веса этих слитков могут быть самые разные, но вес любого слитка не превосходят 10 кг. Также известно, что в царском фонде золота значительно больше тонны. К сожалению, полководец уже стар и не может нести более 40 кг. Какое наибольшее количество золота сможет гарантированно вынести полководец при этих условиях?*

Покажем, что 32 кг (и даже строго больше 32 кг) полководец сможет вынести в любом случае. Для этого ему достаточно упорядочить слитки по весу и брать их подряд, начиная с более тяжёлых. Предположим, что в момент, когда он не может взять очередной слиток, золота у него не больше 32 кг. Тогда этот слиток (самый тяжёлый из оставшихся) весит больше 8 кг. Так как слитки брались в порядке убывания их весов, все взятые полководцем слитки тяжелее 8 кг. Но так как каждый слиток весит не более 10 кг, то полклводец уже взял по крайней мере 4 слитка, и они весят в сумме более 32 кг — противоречие. Итак, у полководца всегда будет более 32 кг золота.

Покажем, что для любого $b>0$ полководец не сможет гарантировано вынести $32+b$ (или больше) кг золота. В самом деле, предположим, что золото храниться в одинаковых слитках весом $8+\varepsilon$ кг каждый ($0<\varepsilon<b/4$). Тогда 5 слитков весят более 40 кг, поэтому полководец унести 5 слитков не сможет. А четыре слитка весят $32+4\varepsilon<32+b$ кг. Утверждение доказано.

Ответ: 32 кг.

5. *Расположите на плоскости N фигур, не налегающих друг на друга так, чтобы выполнялось следующее условие:*

Как бы ни покрасить эти фигуры тремя красками (каждую фигуру в один свой цвет), обязательно какие-нибудь две фигуры одного цвета будут иметь общий участок границы (одна общая точка не считается "участком"). Рассмотрите случаи:

1. $N=4$, а фигуры — произвольные (не обязательно равные) многоугольники на Ваш выбор;

2. $N=6$, а фигуры — квадраты произвольных (не обязательно равных) размеров;

3. $N=4$, а фигуры — произвольные треугольники;

4. N — любое натуральное число на Ваш выбор, а фигуры — однаковые квадраты;

5. $N=11$, а фигуры — однаковые квадраты;

Под раскраской мы будем всегда понимать раскраску в три цвета, причём каждая

Назовём раскраску *правильной*, если каждые две фигуры, имеющие общий участок границы, окрашены в разные цвета. Кроме того, назовём пару фигур A и B *сцепленнойи*, если они имеют двух различных общих соседей C и D таких, что у C и D имеется общий участок границы.

Заметим, что если раскраска правильная, то любая пара сцепленных фигур одного цвета.

Нам достаточно привести пример конструкции, в которой имеется последовательность фигур A_1, A_2, …, A_k $(1 < k \leqslant N)$, таких что каждая пара A_i, A_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$ является сцепленной, а фигуры A_1 и A_k имеют общий участок границы. Приведём соответствующие примеры. При этом ясно, что пример к пункту 3 также будет и примером к пункту 1, а пример к пункту 5 — примером к пункту 4.

случаи 1, 3 $(N = 4,\ k = 2)$ случай 2 $(N = 6,\ k = 3)$ случаи 4, 5 $(N = 11,\ k = 5)$

РЕШЕНИЯ
10 класс

1. *Существуют ли три таких числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трехчлена, то он имеет два различных положительных корня, а если в другом — два различных отрицательных?*

<u>Первый способ.</u> Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня одного знака, то $|b| > \sqrt{b^2 - 4ac}$, откуда $b \neq 0$, $ac > 0$. Если оно имеет два отрицательных корня, то вершина параболы имела бы отрицательную абсциссу $(-b/2a)$, следовательно, числа a, b одного знака. Тогда все коэффициенты такого уравнения одного знака.

Если бы такие числа a, b, c существовали, то с помощью них можно было бы составить уравнение с двумя отрицательными корнями, тогда они все одного знака. Любое квадратное уравнение с коэффициентами одного знака имеет вершину с отрицательной абсциссой, в частности не может иметь двух положительных корней. Следовательно таких чисел нет.

<u>Второй способ.</u> Рассмотрим произвольное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, имеющее два действительных корня. Заметим, что по теореме Виета эти корни одного знака тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0$ т.е. когда одного знака числа a и c. При этом корни положительны, если a и b разного знака $(x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0)$ и отрицательны — если одинакового. Значит, если уравнение имеет два отрицательных корня, то все его три коэффициента одного знака, а если два положительных, то старший коэффициент и свободный член — одного знака, средний коэффициент — другого. Поскольку ни для каких трёх чисел эти условия не могут выполняться одновременно, искомых чисел не существует.

Ответ: Не существуют.

2. *Дана неубывающая последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots$, такая, что $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$ при $n \geqslant 1$. Известно, что $b_7 = 120$. Найдите b_8.*

<u>Первый способ.</u> Прямым расчетом убеждаемся:

$$b_5 = b_7 - b_6; \qquad b_4 = b_6 - b_5 = 2b_6 - b_7; \qquad b_3 = b_5 - b_4 = 2b_7 - 3b_6;$$
$$b_2 = b_4 - b_3 = 5b_6 - 3b_7; \qquad b_1 = b_3 - b_2 = 5b_7 - 8b_6.$$

Последовательность неубывающая, поэтому $0 \geqslant b_2 - b_1 = 13b_6 - 8b_7$, откуда $b_6 \geqslant 8b_7/13 = 960/13 > 73$. Поскольку последовательность из натуральных чисел, то $1 \leqslant b_1 = b_3 - b_2 = 5b_7 - 8b_6$, откуда $b_6 \leqslant 599/8 < 75$. Из этих двух неравенств для целого числа b_6 остается единственная возможность $b_6 = 74$, тогда $b_8 = b_7 + b_6 = 194$. Теперь из предыдущих уравнений мы можем найти все b_i $(i \leqslant 5)$: $b_5 = b_7 - b_6 = 46$; $b_4 = b_6 - b_5 = 28$; $b_3 = b_5 - b_4 = 18$; $b_2 = b_4 - b_3 = 10$ и $b_1 = b_3 - b_2 = 8$. Полученная последовательность действительно состоит из натуральных чисел и монотонно возрастает.

<u>Второй способ.</u> Так как $120 = b_7 = b_6 + b_5 = 2b_5 + b_4 = 3b_4 + 2b_3 = 5b_3 + 3b_2 = 8b_2 + 5b_1$, для некоторых натуральных чисел b_1 и b_2 должно выполняться уравнение $8b_2 + 5b_1 = 120$. Тогда число b_1 делится нацело на 8, т.е. $b_1 = 8s$ для некоторого натурального числа s, а число b_2 делится нацело на 5, откуда $b_2 = 5t$. Тогда уравнение принимает вид $s + t = 3$. Единственная пара натуральных чисел, дающих в сумме два — это числа 2 и 1. Получаем два возможных решения. Первое: $s = 1$, $t = 2$, тогда $b_1 = 8$, $b_2 = 10$ и последовательно получаем $b_3 = 18$, $b_4 = 28$, $b_5 = 46$, $b_6 = 74$, $b_7 = 120$, $b_8 = 194$. Второе: $s = 2$, $t = 1$, тогда

$b_8 = 193$. Однако вторая последовательность не является монотонно не убывающей, так как $b_2 < b_1$. Отсюда получаем ответ.

Ответ: $b_8 = 194$.

3. *Изобретатель придумал чертёжный прибор, позволяющий поделить любой заданный отрезок на две равные части (то есть указать его середину). Можно ли используя только этот прибор и обычную линейку (без делений), разделить произвольный отрезок на три равные части?*

Первый способ. Заметим, что с помощью такого прибора и линейки можно построить медиану в произвольном треугольнике, а значит и точку пересечения медиан.

Пусть нужно поделить отрезок AB, проведем через B произвольную прямую, отличную от AB. Отметим на ней две различные, отличные от B, точки; назовем их C', C''. Построим в треугольниках ABC', ABC'' точки пересечения медиан M', M''. Проведем прямую $M'M''$. Покажем, что она параллельна $C'C''$. Действительно, пусть D', D'' — середины BC', BC'' соответственно. Тогда треугольник $AM'M''$ по общему углу и двум парам соответственных сторон подобен треугольнику $AD'D''$ с коэффициентом $2/3$. Тогда $M'M''$ параллельна $D'D''$, то есть $C'C''$. Поскольку прямая $M'M''$ параллельна $C'C''$, то она пересекает AB в некоторой точке Y. Поскольку треугольники $AM'Y$, $AD'B$ подобны по двум углам, то $\frac{AY}{AB} = \frac{AM'}{AD'}$. Однако, как показано выше, $\frac{AM'}{AD'} = \frac{2}{3}$. Осталось прибором на отрезке AY отметить точку X, делящую его пополам. Точки X, Y — искомые.

Второй способ. Пусть нужно поделить отрезок AB. Отметим точку C вне прямой AB. С помощью прибора отметим середины M, Q отрезков AC, BC соответственно. С его же помощью отметим середину O отрезка MQ, середину N отрезка MO, середину P отрезка OQ. Обозначим через R точку пересечения луча BP со стороной AC. Обозначим точки пересечения лучей RN, RO с AB через X, Y соответственно. Поскольку MQ — средняя линия, то она параллельна AB, теперь $AX{:}XY{:}YB$ совпадает с $MN{:}NO{:}OP = 1{:}1{:}1$. Следовательно, точки X, Y — искомые.

Третий способ.

Пусть нужно поделить отрезок AB. Отметим точку C вне прямой AB. С помощью прибора отметим середины M, E отрезков AC, BM соответственно. Обозначим точку пересечения CE с AB через Y. С помощью прибора отметим середину X отрезка AY. Покажем, что точки X, Y — искомые. Для этого достаточно доказать, что $AY{:}YB = 2{:}1$. Воспользуемся для этого методом центра масс. Расставим следующие массы: по 1 в A, C; и 2 в B.

Центр масс $\{A = 1, C = 1\}$ окажется в середине отрезка AC, то есть в точкеM;

Центр масс $\{A = 1, B = 2, C = 1\}$ совпадает с центром масс системы $\{M = 2, B = 2\}$, то есть окажется в E, середине BM.

На прямой CE лежит центр масс $\{A = 1, B = 2, C = 1\}$, тогда на ней же центр масс $\{A = 1, B = 2\}$. Но он находится на AB, следовательно совпадает с Y.

Из соотношения масс в системе $\{A = 1, B = 2\}$ имеем $AY{:}YB = 2{:}1$, что и требовалось доказать.

Ответ: Можно.

4. *В современном футболе считается, что команда идёт по чемпионскому графику, если она выигрывает дома и играет вничью в гостях. В высшей лиге чемпионата России играют 16 команд. Турнир проводится по круговой системе в два круга (т.е. каждая команда с каждой играет дважды: один раз — в гостях, один — дома). Какое самое низкое место может занять в чемпионате России команда, идущая по чемпионскому графику?*

не получает; более высокое место занимает команда, набравшая больше очков по итогам всего турнира. В случае равенства очков у двух или более команд места между ними распределяются по дополнительным показателям, можно для простоты считать, что по жребию.)

Будем считать потерянные командой очки. В случае поражения команда теряет три очка, в случае ничьей — два. Ясно, что из двух команд более высокое место занимает та, которая потеряла меньше очков. Команда, идущая по чемпионскому графику (назовём её "Чемпионы"), в чемпионате России потеряет $15 \cdot 2 = 30$ очков. Пусть в итоговой таблице выше "Чемпионов" будет k команд; тогда все вместе они потеряли не более $30k$ очков. Каждая из этих команд заведомо потеряла 4 очка в двух матчах с "Чемпионами" — это $4k$ очков. Кроме того, эти k команд сыграли между собой $k(k-1)$ матчей (каждая команда сыграла дома $k-1$ матч). В каждом таком матче в сумме команды потеряли либо 3, либо 4 очка, значит, всего они потеряли не менее $3k(k-1)$ очков. Из неравенства $4k+3k(k-1) \leqslant 30k$ находим, что $k \leqslant \dfrac{29}{3}$, т.е. $k \leqslant 9$, так как k — число целое. Значит, ниже 10-го места "Чемпионы" оказаться не могут.

Возможны ситуации, когда "Чемпионы" будут десятыми. Например, такая: некоторые 9 команд выиграли друг у друга дома (и проиграли в гостях), а у остальных 6 команд выиграли обе встречи, домашнюю и гостевую. Тогда каждая из них потеряла $4+3 \cdot 8 = 28$ очков, и оказалась в итоговой таблице выше "Чемпионов".

Ответ: 10-е место.

5. *Используя знаки четырёх арифметических действий, скобки и знак модуля, напишите уравнение, множеством всех решений которого является*

1) бесконечное множество точек на числовой прямой;

2) объединение двух лучей $(-\infty;\ -1]$ *и* $[1;\ \infty)$ *числовой прямой;*

3) объединение отрезков $[0;\ 1]$ *и* $[3;\ 5]$ *числовой прямой;*

4) квадрат $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$ *плоскости* xOy*;*

5) граница квадрата $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$ *плоскости* xOy*.*

(В пунктах 4 и 5 требуется составить уравнение от двух переменных: x *и* y*. Приводить решения полученных уравнений не требуется.)*

Заметим, что по определению модуля числа равенство $|x| = x$ равносильно условию $x \geqslant 0$, а равенство $|x| = -x$ равносильно условию $x \leqslant 0$. Таким образом, каждое из данных уравнений задаёт бесконечное множество точек — целый луч. (Это — ответ на пункт 1.) Заменой x на $x - a$ мы можем получать лучи, сдвинутые на a единиц вдоль любой оси.

Пусть T_1 и T_2 — множества решений уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ соответственно, причём функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду определены и отрицательны. Тогда уравнение $f(x) + g(x) = 0$ равносильно тому, что каждое из уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имеет место, т.е. уравнение $f(x)+g(x) = 0$ задаёт пересечение множеств $T_1 \cap T_2$. Также легко убедиться, что множеством решений уравнения $f(x) \cdot g(x) = 0$ будет объединение множеств $T_1 \cup T_2$. Таким образом, достаточно представить множества, указанные в условии в виде объединений и пересечений лучей. Получим следующее.

Для пункта 2. Уравнение $(|x + 1| + x + 1)(|x - 1| - x + 1) = 0$ задаёт множество $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ \infty)$.

Для пункта 3. Уравнение $((|x|-x)+(|x-1|+x-1))((|x-3|-x+3)+(|x-5|+x-5)) = 0$ задаёт множество $[0;\ 1] \cup [3;\ 5]$.

При переходе на плоскость следует иметь в виду, что теперь отсутствие в уравнении, скажем, переменной y означает, что вместе с каждым обычным решением $x = a$ мы по-абсциссой a. В частности, равенство $|x| = x$ задаёт на плоскости целую полуплоскость (состоящую из первой и четвёртой координатных четвертей). Остальные идеи решения связаны по-прежнему с пересечениями и объединениями. Можно, например, поступить так.

Для пункта 4. Уравнение $(|x|-x)+(|x-1|+x-1)+(|y|-y)+(|y-1|+y-1)=0$ задаёт квадрат $[0;\,1]\times[0;\,1]$.

Для пункта 5. Уравнение $((|x|-x)+(|x-1|+x-1)+|y(y-1)|)((|y|-y)+(|y-1|+y-1)+|x(x-1)|)=0$ задаёт границу квадрата $[0;\,1]\times[0;\,1]$.

Замечание. Разумеется, приведённые уравнения не единственно возможные.

Ответ: 1) $|x| = x$;
2) $(|x+1|+x+1)(|x-1|-x+1)=0$;
3) $((|x|-x)+(|x-1|+x-1))((|x-3|-x+3)+(|x-5|+x-5))=0$;
4) $(|x|-x)+(|x-1|+x-1)+(|y|-y)+(|y-1|+y-1)=0$;
5) $((|x|-x)+(|x-1|+x-1)+|y(y-1)|)((|y|-y)+(|y-1|+y-1)+|x(x-1)|)=0$.

РЕШЕНИЯ
11 класс

1. *На доске начерчен выпуклый четырехугольник. Наташа утверждает, что его можно разрезать диагональю на два остроугольных треугольника, Маша — что его можно разрезать на два прямоугольных треугольника, а Аника — что на два тупоугольных треугольника. Оказалось, что ровно одна девочка не права. Про кого из девочек можно наверняка утверждать, что она права?*

Ответ:

к решению задачи 3. Правы Наташа и Аника.	к решению задачи 3. Правы Маша и Аника.

Приведённые примеры (см. рисунки) показывают, что ситуации когда правы Маша и Аника и правы Наташа и Аника обе возможны, поэтому нельзя утверждать наверняка, что права Маша и нельзя утверждать наверняка, что права Наташа. Докажем, что про Анику такое можно утверждать, так как ситуация, в которой Аника ошибается (и тогда правы Маша и Наташа) невозможна.

В самом деле, пусть Наташа права, и пусть диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ делит его на два остроугольных треугольника. Тогда углы A и C — острые, на углы B и D приходится в сумме больше $180°$, следовательно, среди этих углов есть тупой, и один из треугольников, на которые диагональ AC делит четырёхугольник есть тупоугольный. Значит, в этом случае Маша не права.

Ответ: Только про Анику.

2. *Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, d, лежащих на отрезке $[-1;\,1]$, выполнено неравенство $|ac+ad+bc-bd| \leqslant 2$.*

Так как $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ и $|xy| = |x|\cdot|y|$ для любых чисел x и y, имеем $|ac+ad+bc-bd| = |a(c+d)+b(c-d)| \leqslant |a||c+d|+|b||c-d| \leqslant |c+d|+|c-d|$. Последнее выражение в зависимости от значений c и d равно либо $2|c|$, либо $2|d|$, и во всех случаях не превосходит числа 2. Неравенство доказано.

3. *Пусть дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что в ней либо существует бесконечная подпоследовательность, любые два члена которой не кратны друг другу, либо существует бесконечная подпоследовательность, каждый член которой кратен предыдущему.*

Для каждого элемента a_n исходной последовательности выпишем в возрастающем порядке все числа из последовательности, кратные ему, назовем эти серии $B(a_n)$.

Если все эти серии конечны, то возьмем элемент c_1 из $B(1)$, найдется в последовательности элемент больший всех элементов из $B(c_1)$, назовем его c_2 (он автоматически не находится в $B(c_1)$, то есть не делится на c_1), затем возьмем в последовательности элемент больший всех элементов из $B(c_2)$, назовем его c_3 (он автоматически не находится в $B(c_1)$,$B(c_2)$, в частности не делится на c_1, c_2) и т.д. Искомая последовательность построена.

Пусть для некоторого k серия $B(a_k)$ бесконечна, примем $d_1 = a_k$. Если все серии элементов из серии $B(d_1)$ конечны, то возьмем эту серию в качестве исходной и по предыдущему абзацу построим требуемую последовательность. Если же для некоторого a_l из серии $B(d_1)$ его серия бесконечна, то примем $d_2 = a_l$. Поскольку d_2 взято из $B(d_1)$ автовозьмем эту серию в качестве исходной и по предыдущему абзацу построим требуемую последовательность. Если же для некоторого d_3 из серии $B(d_2)$ его серия бесконечна, то поскольку d_3 взято из $B(d_3)$, автоматически d_3 делится на d_2, а значит и на d_1. и т.д. Повторив этот процесс мы получим или последовательность c_i, каждый элемент которой не делится на любой другой, или последовательность d_i, каждый элемент которой делится на все предыдущие.

4.*В квадрате $ABCD$ точка M лежит на стороне AB, а точка N — на стороне CD. P — точка пересечения отрезков CM и BN, а точка Q — точка пересечения отрезков MD и AN. Докажите, что отрезок PQ не меньше половины стороны квадрата.*

к решению задачи 4

Пусть сторона квадрата равна a. Опустим из точки P перпендикуляр PR на сторону BC, а из точки Q — перпендикуляр QS на сторону AD. Так как $RP+PQ+QS \geqslant a$, достаточно доказать, что $PR+QS \leqslant \frac{a}{2}$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что $PR \leqslant \frac{BM+CN}{4}$ и что $QS \leqslant \frac{AM+DN}{4}$, так как при почленном сложении двух последних неравенств получим

$$PR+QS \leqslant \frac{BM+CN}{4}+\frac{AM+DN}{4}=\frac{(BM+AM)+(CN+DN)}{4}=\frac{AB+CD}{4}=\frac{a}{2}.$$

Оба неравенства доказываются одинаково. Докажем, например, что $QS \leqslant \frac{AM+DN}{4}$, т.е., что $\frac{AM+DN}{QS} \geqslant 4$. Из подобия треугольников AQS и AND находим, что $\frac{DN}{QS}=\frac{AD}{AS}$, а из подобия треугольников DQS и DMA — что $\frac{DM}{QS}=\frac{AD}{DS}$. Сложив левые и правые части этих уравнений, имеем $\frac{AM+DN}{QS}=\frac{AD}{AS}+\frac{AD}{DS}$. Пусть $\frac{AS}{AD}=k$, $(0 \leqslant k \leqslant 1)$. Тогда $\frac{DS}{AD}=\frac{AD-AS}{AD}=1-k$, поэтому $\frac{AM+DN}{QS}=\frac{1}{k}+\frac{1}{1-k}=\frac{1}{k(1-k)}$, и нам остаётся доказать неравенство $\frac{1}{k(1-k)} \geqslant 4$ при $0 \leqslant k \leqslant 1$. Последнее неравенство очевидно, так как в указанном интервале равносильными преобразованиями приводится к неравенству $(2k-1)^2 \geqslant 0$.

5.*Инопланетянин Z живёт в двухмерном мире, то есть в плоскости. Однажды Z решил позагорать. Z хочет, чтобы каждая точка на границе его тела была освещена лучами не меньше 1 минуты. При этом Z может вертеться в плоскости как угодно, а лучи света распространяются внутри плоскости параллельно оси OX и в том же направлении, что и ось. Точка поверхности тела считается освещённой, если на неё не падает тень ни от какой другой точки тела инопланетянина.*

1. Докажите, что если Z имеет форму квадрата, то он не сможет загореть быстрее, чем за 2 минуты;

2. Докажите, что если Z имеет форму треугольника, то он не сможет загореть быстрее, чем за 1,5 минуты.

3. Сможет ли Z загореть быстрее, чем за 2 минуты, если Z — сектор круга с тупым центральным углом α?

4. Верно ли, что если Z имеет форму выпуклого четырёхугольника, то он не сможет

5. Верно ли, что если Z имеет форму выпуклого n-угольника ($n > 4$), то он не сможет загореть быстрее, чем за 1.5 минуты?

1. Пусть каждая точка границы инопланетянина (т.е. границы квадрата) была освещена не менее 1 минуты. Рассмотрим середины противоположных сторон квадрата. Эти две точки ни при каком положении инопланетянина не могут освещаться одновременно, а так как каждая из них была освещена не менее 1 минуты, инопланетянину потребовалось не менее двух минут, чтобы загореть.

2. Пусть тело инопланетянина — треугольник ABC и каждая точка его границы инопланетянина (т.е. ломаной ABC) была освещена не менее 1 минуты. Чтобы середина стороны AB (точка M) была освещена, свет должен идти из полуплоскости с границей AB, не содержащей треугольника ABC. Аналогично, чтобы была освещена точка N — середина стороны AC, свет должен идти из полуплоскости с границей AC. Значит, чтобы осветить обе середины, инопланетянин должен расположиться так, чтобы чтобы свет шёл из угла, образованного продолжениями прямых AB и AC за точку A. Но в этом случае середина стороны BC — точка P — освещена быть не может. Вывод: из трёх середин сторон одновременно могут быть освещены не более двух. Пусть инопланетянин загорел полностью за некоторое время t (в минутах). Мы можем считать, не ограничивая общности, что в любой момент времени были освещены середины двух его сторон. Пусть точки M и N одновременно освещались t_1 минут, точки M и P — t_2 минут и точки N и P — t_3 минут. Тогда $t = t_1 + t_2 + t_3$. Но по условиям загара $t_1 + t_2 \geqslant 1$, $t_1 + t_3 \geqslant 1$ и $t_2 + t_3 \geqslant 1$. Сложив все три неравенства, получим $2(t_1 + t_2 + t_3) \geqslant 3$, т.е. $t \geqslant 1,5$, что завершает доказательство.

инопланетянин — треугольник

3. Пусть тело инопланетянина — сектор круга MON с центральным углом $MON > 90°$. Отметим на дуге сектора точку A так, чтобы $\angle MOA = 90°$, а на радиусе OM возьмём произвольную внутреннюю точку B. Тогда точки A и B одновременно освещены быть не могут, поэтому, как и в пункте 1, инопланетяниу не удастся загореть менее, чем за 2 минуты.

инопланетянин — сектор круга

4. Утверждение верно. доказательство приведено в следующем пункте.

5. Покажем, что утверждение верно. Пусть тело инопланетянина — выпуклый N угольник, и AB — одна из его сторон. Тогда в силу выпуклости инопланетянин целиком лежит в одной из полуплоскостей с границей AB. Проведём в этой полуплоскости прямую l, параллельную AB и такую, что тело инопланетянина целиком содержится в полосе с границами AB и l. Кроме того, пусть l имеет с телом инопланетянина хотя бы одну общую точку. Возможны два случая (см. рисунок).

инопланетянин — многоугольник.

Случай первый. Прямая l содержит целиком некоторую сторону многоугольника — тела инопланетянина (рисунок слева). Тогда выберем на этой стороне точку N, отличную от вершин, а на стороне AB — точку M. Рассуждая, как в первом пункте, убеждаемся, что точки M и N не могут быть освещены одновременно, значит, инопланетянину потребуется для загара не менее 2 минут.

Случай второй. Прямая l и инопланетянин имеют единственную общую точку — вершину N (рисунок справа). Выберем на сторонах, смежных с этой вершиной, по точке. Пусть это точки P и Q и пусть они не совпадают с вершинами многоугольника. На стодоказываем, что из точек M, P и Q одновременно могут быть освещены только 2, поэтому инопланетянину для загара понадобится не менее полутора минут. Утверждение доказано.

Ответ: 3. Не может. 4. Верно. 5. Верно.