XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

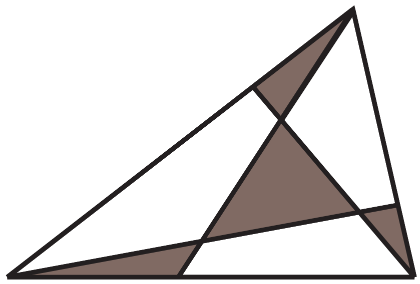
5–6 класс

1. Имеется 8 цифр: 1,1,2,2,3,3,4,4. Можно ли их расставить в строку таким образом, чтобы между единицами была ровно одна цифра, между двойками — две цифры, между тройками — три цифры, между четвёрками — четыре цифры? Ответ обосновать.

2. Бригада метростроевцев вырыла тоннель метро за 36 дней. Дошкольник Миша, самоотверженно работая пластмассовым совочком, вырыл такой же тоннель за 396 дней. За сколько дней выроют такой же тоннель бригада и Миша, действуя с двух разных концов? Ответ обосновать.

3. Маленькая Юля нарисовала в книжке закаляку на каждой странице, номер которой делится на 3, закаляка обиделась и нарисовала Юлю в этой книжке на каждой странице, номер которой делится на 5. В результате в книге оказалось ровно 6 закаляк и 4 портрета Юли. Сколько страниц в книжке? Привести все варианты ответа и доказать, что других нет.

4. В большом треугольнике из каждой вершины провели жирный отрезок до противоположной стороны. Большой треугольник оказался разбитым на 4 треугольника и 3 четырёхугольника (см. рисунок). Сумма периметров трёх белых четырёхугольников равна 25, а сумма периметров четырёх чёрных треугольников равна 20. Зная, что периметр исходного большого треугольника равен 18, найдите сумму длин трех жирных отрезков. Ответ обосновать.



к задаче 4

5. На Изумрудный город надвигается деревянная армия Урфина Джюса. Воробей сообщил, что число дуболомов в этой армии не менее 200, но не более 300. Галка добавила, что вся армия дуболомов движется по дороге колонной по 6 дуболомов в каждом ряду. Оляпка сказала, что вооружённых дуболомов на 15 больше, чем невооружённых. Сорока доложила, что, если не считать генерала Лан Пирота (он тоже дуболом), раскрашенных дуболомов в два раза больше, чем нераскрашенных. Синичка пропела, что однажды видела, как вся армия дуболомов была выстроена в колонну, в которой число рядов совпадало с числом дуболомов в каждом ряду. Известно, что одна из птиц сообщила неверные сведения, а остальные четверо были абсолютно правы. Сколько дуболомов наступали на Изумрудный город? Ответ обосновать.

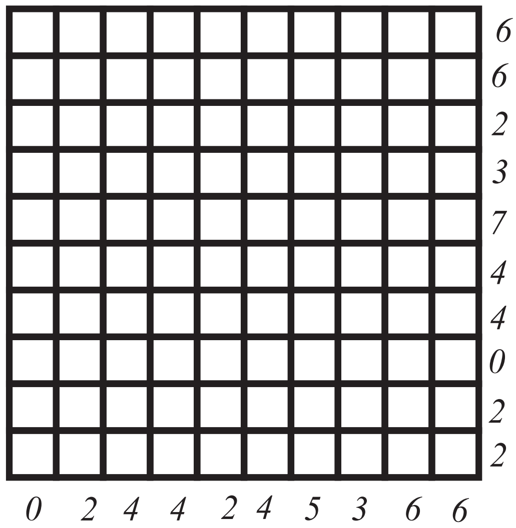
6. Каждый из 7 мальчиков имеет среди остальных не менее трёх родных братьев. Докажите, что все 7 мальчиков — родные братья.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

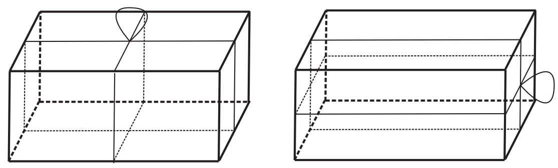
7 класс

1. Часть клеток в таблице размером 10×10 клеток покрашены в чёрный цвет. Вам известно количество закрашенных клеток в каждой из строк и в каждом из столбцов — соответствующие числа приведены на рисунке. Также известно, что узор из чёрных клеток состоит ровно из 6 прямоугольников, которые не пересекаются даже по точкам границы. Восстановите узор.



к задаче 1

2. Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку (как это делают в магазине) и сделать бантик сверху (кресты сверху и снизу, и отрезки по 4-м боковым граням; см. рисунок). А вот чтобы перевязать её с таким же бантиком сбоку (т. е. кресты из ленточки на левой и правой грани и 4 отрезка спереди, сзади, сверху и снизу; см. рисунок) потребуется ленточка длиной 178 см. Найдите размеры коробки. Ответ обосновать.



к задаче 2

3. На суде в качестве вещественного доказательства фигурируют 6 монет. Ещё до суда эксперт обнаружил, что монеты в конвертах с номерами с первого по третий — фальшивые, а в конвертах с номерами с четвёртого по шестой — настоящие. Суду же известно, что все фальшивые монеты весят одинаково и все настоящие монеты также одинаково весят. Кроме того, известно, что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта только чашечные весы без гирь. Он хочет доказать суду, что монеты в конвертах с номерами с первого по третий — фальшивые. Как он может это сделать, используя только два взвешивания?

4. Из произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2013$ первых 2013 чисел натурального ряда вычеркнули все натуральные числа, делящиеся на 5 (т. е. $5, 10, 15$, и т. д.), и перемножили оставшиеся. Пусть N — получившееся в результате число. Найдите его последнюю цифру. Ответ обосновать.

5. В центре квадрата со стороной 4 метра стоит мощный точечный прожектор, который освещает угол в 90^o. Известно, что при некотором положении прожектора одна из сторон квадрата оказалась освещённой ровно на одну четвёртую свою часть. Чему равна площадь освещённой при таком положении прожектора части квадрата? Ответ обосновать.

6. В парке собрались 12 пенсионеров, чтобы поиграть в шахматы. У них всего одна шахматная доска. В каждой партии принимают участие двое, и после каждой сыгранной партии проигравший (ничьих не было) идёт погулять, а его место занимает другой пенсионер. После одной из партий оказалось, что любые два пенсионера (из этих 12-ти) сыграли между собой ровно 1 раз. Докажите, что за это время хотя бы один из 12-ти пенсионеров сыграл не менее трёх партий подряд.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

8 класс

1. У четырёх углов прямоугольного бассейна размером 10×25 метров стоят Аня, Борис, Вера и Гена, а где-то на краю бассейна стоит их учительница Мария Ивановна. Когда она позвала ребят, первые трое подошли к ней, пройдя в сумме 50 метров, а к Гене она пошла сама. Какое расстояние прошла Мария Ивановна, если все они шли по периметру кратчайшим путем? Ответ обосновать.

2. Шесть футбольных команд сыграли между собой однокруговой турнир (каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу). За победу любая команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Сколько ничьих было в турнире, если команды соответственно набрали 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очков? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

3. Два села Бабкино и Дедкино находятся по разные стороны реки (не на берегу) с параллельными берегами. Считая сёла точками на плоскости, укажите, в каком месте реки следует построить мост через неё (обязательно перпендикулярно берегам) так, чтобы путь из Бабкино до Дедкино был минимальным. Ответ обосновать.

4. В городской олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48. Если бы всех участников спросили, в скольких олимпиадах они участвовали, то ответ “по крайней мере в двух” имели бы возможность сказать в два раза меньше человек, чем ответ “не менее, чем в одной”, а ответ “в трёх” — втрое меньше человек, чем ответ “не менее, чем в одной”. Сколько всего человек участвовало в олимпиадах? Ответ обосновать.

5. Выпуклый четырёхугольник обладает следующим свойством: при любом разрезании этого четырёхугольника на три треугольника (без остатка), хотя бы один из этих треугольников имеет площадь, равную 1. Докажите, что данный четырёхугольник — параллелограмм площади 2.

6. Пусть $a+b^2 \geqslant c+d^2$, $a^2+b \geqslant c^2+d$. Докажите, что $a+b \geqslant c+d$, если известно, что $a, b, c, d \geqslant \frac{1}{2}$.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Буратино выписал следующую последовательность натуральных чисел: первое число равно 1, два следующих — двойки, три следующих — тройки и т. д. Какое натуральное число будет стоять в этой последовательности на 2013-м месте? Ответ обосновать.

2. Определим функцию–“срезку”:

$$t_+ = \begin{cases} t, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Доказать тождество $(x+6)_+ - 3(x)_+ + 2(x-3)_+ = \frac{1}{2}(2|x-3| + |x+6| - 3|x|)$.

3. Построим последовательность квадратных трёхчленов $\{x^2 + a_n x + b_n\}$ с целыми коэффициентами a_n и b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) следующим образом: коэффициенты предыдущего трёхчлена (т. е. числа a_n и b_n) будут корнями следующего трёхчлена $x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1}$. Известно, что после некоторого шага очередной трёхчлен совпал с первым трёхчленом $x^2 + a_1 x + b_1$. Сколько различных трехчленов могло быть в этой последовательности? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

4. Можно ли произвольный треугольник разрезать без остатка на 3 равновеликие трапеции?

5. Врач дал больному один пакетик с одинаковыми таблетками и велел принимать ежедневно каждое утро по четверти таблетки. Больной так и сделал, причём каждое утро он вынимал из пакетика наугад, что попадётся. Если попадалась целая таблетка, пациент разламывал ее на 4 равные части, одну из которых съедал, а остальные 3 части возвращал обратно. Если попадалась ранее отломленная четвертинка, то он её сразу проглатывал. После месяца такого лечения в пакетике осталось в 8 раз больше четвертинок, чем целых таблеток, а еще через три месяца в пакетике осталось всего 5 целых таблеток. Сколько в этот момент осталось четвертинок? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

6. Квадрат $ABCD$ покрасили в синий цвет, затем внутри квадрата построили дугу окружности с центром в точке A и радиусом, равным стороне квадрата. Точки квадрата внутри окружности перекрасили в красный цвет. Укажите, как разрезать квадрат по прямой MN на два прямоугольника $ABMN$ и $NMCD$ так, чтобы сумма площадей синей фигуры внутри $ABMN$ и красной внутри $NMCD$ была минимально возможной.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

1. Имеется 6 гирек общей массой 1 кг. С.Э. разложил их на 3 кучки так, что общий вес каждой кучки оказался одинаков. После этого пришёл Д.В., и разложил эти 6 гирек на 4 кучки, и вновь вес гирек в каждой кучке был одинаков. Узнав об этой истории, В.Т. захотел узнать, каковы же были веса гирь, и нашёл все возможные варианты. Сколько таких вариантов? Ответ обосновать.

2. Бабуля покупает в магазине хлеб. Когда однажды она купила одну булку, кассир округлил (в меньшую сторону) стоимость хлеба до ближайшего целого числа в рублях. Во второй день она купила две булки, и снова их общую сумму на кассе округлили до целого числа рублей (в меньшую сторону). Бабуля обрадовалась, и в третий купила сразу три, а в четвёртый день — целых четыре булки, на кассе же также округляли общую стоимость покупки в меньшую сторону. Всего за 4 дня бабуля потратила на хлеб 184 рубля. Насколько велика могла быть суммарная за 4 дня скидка за эти покупки?

3. Действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$ удовлетворяют соотношениям $a_1 = a_n = 0$, $a_{k-1} + a_{k+1} \geqslant 2a_k$ для всех натуральных $1 < k < n$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неположительны.

4. На плоскости даны две пересекающиеся прямые. Найти геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до этих прямых равна заданному положительному числу $l > 0$.

5. В парке собрались 12 пенсионеров, чтобы поиграть в шахматы. У них всего одна шахматная доска. В каждой партии принимают участие двое, и после каждой сыгранной партии проигравший (ничьих не было) идёт погулять, а его место занимает другой пенсионер. После одной из партий оказалось, что любые два пенсионера (из этих 12-ти) сыграли между собой ровно 1 раз. Докажите, что за это время хотя бы один из 12-ти пенсионеров сыграл не менее трёх партий подряд.

6. Имеется семь жетонов с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

1. У Сергея 5 альбомов с фотографиями. Просматривая фотографии, он заметил, что в любых двух альбомах общее число всех фотографий принимает только 3 значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом фотоальбоме? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

2. На экваторе планеты Барраган все деревья одинаковые и растут вертикально вверх. Если все они упадут вдоль экватора в одну сторону (пусть на запад), то общая длина участков экватора, заваленных деревьями, составит 100 км. Докажите, что если все эти деревья упадут в противоположную сторону (на восток), то общая длина заваленных участков экватора тоже составит 100 км.

3. Врач дал больному один пакетик с одинаковыми таблетками и велел принимать ежедневно каждое утро по четверти таблетки. Больной так и сделал, причём каждое утро он вынимал из пакетика наугад, что попадётся. Если попадалась целая таблетка, пациент разламывал её на 4 равные части, одну из которых съедал, а остальные 3 части возвращал обратно. Если попадалась ранее отломленная четвертинка, то он её сразу проглатывал. После месяца такого лечения в пакетике осталось в 8 раз больше четвертинок, чем целых таблеток, а еще через три месяца в пакетике осталось всего 5 целых таблеток. Сколько в этот момент осталось четвертинок? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

4. Пусть действительные числа $a, b, c \geqslant 0$, и $a+b+c=1$. Доказать неравенство

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{4}(b-c)^2}+\sqrt{b^2+\frac{1}{4}(c-a)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{4}(a-b)^2} \leqslant 2.$$

5. Найти множество значений функции $f(x)=\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ при $x \neq 0$.

6. Можно ли через вершины куба провести 8 параллельных плоскостей (по одной через каждую вершину) так, чтобы все расстояния между соседними плоскостями были равны? Ответ обосновать.