XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

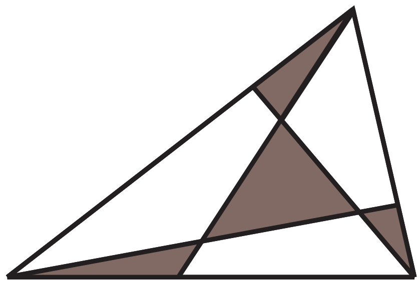
5–6 класс

1. Имеется 8 цифр: 1,1,2,2,3,3,4,4. Можно ли их расставить в строку таким образом, чтобы между единицами была ровно одна цифра, между двойками — две цифры, между тройками — три цифры, между четвёрками — четыре цифры? Ответ обосновать.

2. Бригада метростроевцев вырыла тоннель метро за 36 дней. Дошкольник Миша, самоотверженно работая пластмассовым совочком, вырыл такой же тоннель за 396 дней. За сколько дней выроют такой же тоннель бригада и Миша, действуя с двух разных концов? Ответ обосновать.

3. Маленькая Юля нарисовала в книжке закаляку на каждой странице, номер которой делится на 3, закаляка обиделась и нарисовала Юлю в этой книжке на каждой странице, номер которой делится на 5. В результате в книге оказалось ровно 6 закаляк и 4 портрета Юли. Сколько страниц в книжке? Привести все варианты ответа и доказать, что других нет.

4. В большом треугольнике из каждой вершины провели жирный отрезок до противоположной стороны. Большой треугольник оказался разбитым на 4 треугольника и 3 четырёхугольника (см. рисунок). Сумма периметров трёх белых четырёхугольников равна 25, а сумма периметров четырёх чёрных треугольников равна 20. Зная, что периметр исходного большого треугольника равен 18, найдите сумму длин трех жирных отрезков. Ответ обосновать.



к задаче 4

5. На Изумрудный город надвигается деревянная армия Урфина Джюса. Воробей сообщил, что число дуболомов в этой армии не менее 200, но не более 300. Галка добавила, что вся армия дуболомов движется по дороге колонной по 6 дуболомов в каждом ряду. Оляпка сказала, что вооружённых дуболомов на 15 больше, чем невооружённых. Сорока доложила, что, если не считать генерала Лан Пирота (он тоже дуболом), раскрашенных дуболомов в два раза больше, чем нераскрашенных. Синичка пропела, что однажды видела, как вся армия дуболомов была выстроена в колонну, в которой число рядов совпадало с числом дуболомов в каждом ряду. Известно, что одна из птиц сообщила неверные сведения, а остальные четверо были абсолютно правы. Сколько дуболомов наступали на Изумрудный город? Ответ обосновать.

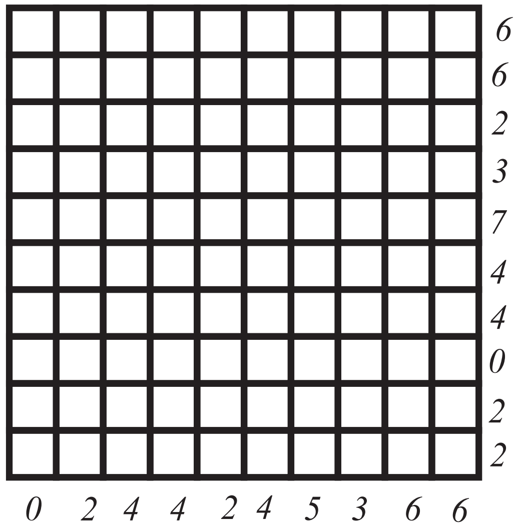
6. Каждый из 7 мальчиков имеет среди остальных не менее трёх родных братьев. Докажите, что все 7 мальчиков — родные братья.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

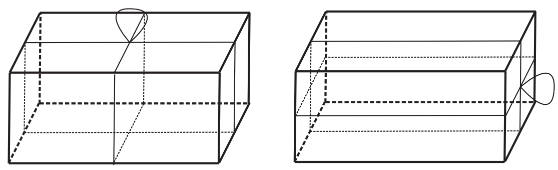
7 класс

1. Часть клеток в таблице размером 10×10 клеток покрашены в чёрный цвет. Вам известно количество закрашенных клеток в каждой из строк и в каждом из столбцов — соответствующие числа приведены на рисунке. Также известно, что узор из чёрных клеток состоит ровно из 6 прямоугольников, которые не пересекаются даже по точкам границы. Восстановите узор.



к задаче 1

2. Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку (как это делают в магазине) и сделать бантик сверху (кресты сверху и снизу, и отрезки по 4-м боковым граням; см. рисунок). А вот чтобы перевязать её с таким же бантиком сбоку (т. е. кресты из ленточки на левой и правой грани и 4 отрезка спереди, сзади, сверху и снизу; см. рисунок) потребуется ленточка длиной 178 см. Найдите размеры коробки. Ответ обосновать.



к задаче 2

3. На суде в качестве вещественного доказательства фигурируют 6 монет. Ещё до суда эксперт обнаружил, что монеты в конвертах с номерами с первого по третий — фальшивые, а в конвертах с номерами с четвёртого по шестой — настоящие. Суду же известно, что все фальшивые монеты весят одинаково и все настоящие монеты также одинаково весят. Кроме того, известно, что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта только чашечные весы без гирь. Он хочет доказать суду, что монеты в конвертах с номерами с первого по третий — фальшивые. Как он может это сделать, используя только два взвешивания?

4. Из произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2013$ первых 2013 чисел натурального ряда вычеркнули все натуральные числа, делящиеся на 5 (т. е. $5, 10, 15$, и т. д.), и перемножили оставшиеся. Пусть N — получившееся в результате число. Найдите его последнюю цифру. Ответ обосновать.

5. В центре квадрата со стороной 4 метра стоит мощный точечный прожектор, который освещает угол в 90^o. Известно, что при некотором положении прожектора одна из сторон квадрата оказалась освещённой ровно на одну четвёртую свою часть. Чему равна площадь освещённой при таком положении прожектора части квадрата? Ответ обосновать.

6. В парке собрались 12 пенсионеров, чтобы поиграть в шахматы. У них всего одна шахматная доска. В каждой партии принимают участие двое, и после каждой сыгранной партии проигравший (ничьих не было) идёт погулять, а его место занимает другой пенсионер. После одной из партий оказалось, что любые два пенсионера (из этих 12-ти) сыграли между собой ровно 1 раз. Докажите, что за это время хотя бы один из 12-ти пенсионеров сыграл не менее трёх партий подряд.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

8 класс

1. У четырёх углов прямоугольного бассейна размером 10×25 метров стоят Аня, Борис, Вера и Гена, а где-то на краю бассейна стоит их учительница Мария Ивановна. Когда она позвала ребят, первые трое подошли к ней, пройдя в сумме 50 метров, а к Гене она пошла сама. Какое расстояние прошла Мария Ивановна, если все они шли по периметру кратчайшим путем? Ответ обосновать.

2. Шесть футбольных команд сыграли между собой однокруговой турнир (каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу). За победу любая команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Сколько ничьих было в турнире, если команды соответственно набрали 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очков? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

3. Два села Бабкино и Дедкино находятся по разные стороны реки (не на берегу) с параллельными берегами. Считая сёла точками на плоскости, укажите, в каком месте реки следует построить мост через неё (обязательно перпендикулярно берегам) так, чтобы путь из Бабкино до Дедкино был минимальным. Ответ обосновать.

4. В городской олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48. Если бы всех участников спросили, в скольких олимпиадах они участвовали, то ответ “по крайней мере в двух” имели бы возможность сказать в два раза меньше человек, чем ответ “не менее, чем в одной”, а ответ “в трёх” — втрое меньше человек, чем ответ “не менее, чем в одной”. Сколько всего человек участвовало в олимпиадах? Ответ обосновать.

5. Выпуклый четырёхугольник обладает следующим свойством: при любом разрезании этого четырёхугольника на три треугольника (без остатка), хотя бы один из этих треугольников имеет площадь, равную 1. Докажите, что данный четырёхугольник — параллелограмм площади 2.

6. Пусть $a+b^2 \geqslant c+d^2$, $a^2+b \geqslant c^2+d$. Докажите, что $a+b \geqslant c+d$, если известно, что $a, b, c, d \geqslant \frac{1}{2}$.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Буратино выписал следующую последовательность натуральных чисел: первое число равно 1, два следующих — двойки, три следующих — тройки и т. д. Какое натуральное число будет стоять в этой последовательности на 2013-м месте? Ответ обосновать.

2. Определим функцию–“срезку”:

$$t_+ = \begin{cases} t, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Доказать тождество $(x+6)_+ - 3(x)_+ + 2(x-3)_+ = \dfrac{1}{2}(2|x-3| + |x+6| - 3|x|)$.

3. Построим последовательность квадратных трёхчленов $\{x^2 + a_n x + b_n\}$ с целыми коэффициентами a_n и b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) следующим образом: коэффициенты предыдущего трёхчлена (т. е. числа a_n и b_n) будут корнями следующего трёхчлена $x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1}$. Известно, что после некоторого шага очередной трёхчлен совпал с первым трёхчленом $x^2 + a_1 x + b_1$. Сколько различных трехчленов могло быть в этой последовательности? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

4. Можно ли произвольный треугольник разрезать без остатка на 3 равновеликие трапеции?

5. Врач дал больному один пакетик с одинаковыми таблетками и велел принимать ежедневно каждое утро по четверти таблетки. Больной так и сделал, причём каждое утро он вынимал из пакетика наугад, что попадётся. Если попадалась целая таблетка, пациент разламывал ее на 4 равные части, одну из которых съедал, а остальные 3 части возвращал обратно. Если попадалась ранее отломленная четвертинка, то он её сразу проглатывал. После месяца такого лечения в пакетике осталось в 8 раз больше четвертинок, чем целых таблеток, а еще через три месяца в пакетике осталось всего 5 целых таблеток. Сколько в этот момент осталось четвертинок? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

6. Квадрат $ABCD$ покрасили в синий цвет, затем внутри квадрата построили дугу окружности с центром в точке A и радиусом, равным стороне квадрата. Точки квадрата внутри окружности перекрасили в красный цвет. Укажите, как разрезать квадрат по прямой MN на два прямоугольника $ABMN$ и $NMCD$ так, чтобы сумма площадей синей фигуры внутри $ABMN$ и красной внутри $NMCD$ была минимально возможной.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

1. Имеется 6 гирек общей массой 1 кг. С.Э. разложил их на 3 кучки так, что общий вес каждой кучки оказался одинаков. После этого пришёл Д.В., и разложил эти 6 гирек на 4 кучки, и вновь вес гирек в каждой кучке был одинаков. Узнав об этой истории, В.Т. захотел узнать, каковы же были веса гирь, и нашёл все возможные варианты. Сколько таких вариантов? Ответ обосновать.

2. Бабуля покупает в магазине хлеб. Когда однажды она купила одну булку, кассир округлил (в меньшую сторону) стоимость хлеба до ближайшего целого числа в рублях. Во второй день она купила две булки, и снова их общую сумму на кассе округлили до целого числа рублей (в меньшую сторону). Бабуля обрадовалась, и в третий купила сразу три, а в четвёртый день — целых четыре булки, на кассе же также округляли общую стоимость покупки в меньшую сторону. Всего за 4 дня бабуля потратила на хлеб 184 рубля. Насколько велика могла быть суммарная за 4 дня скидка за эти покупки?

3. Действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$ удовлетворяют соотношениям $a_1 = a_n = 0$, $a_{k-1} + a_{k+1} \geqslant 2a_k$ для всех натуральных $1 < k < n$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неположительны.

4. На плоскости даны две пересекающиеся прямые. Найти геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до этих прямых равна заданному положительному числу $l > 0$.

5. В парке собрались 12 пенсионеров, чтобы поиграть в шахматы. У них всего одна шахматная доска. В каждой партии принимают участие двое, и после каждой сыгранной партии проигравший (ничьих не было) идёт погулять, а его место занимает другой пенсионер. После одной из партий оказалось, что любые два пенсионера (из этих 12-ти) сыграли между собой ровно 1 раз. Докажите, что за это время хотя бы один из 12-ти пенсионеров сыграл не менее трёх партий подряд.

6. Имеется семь жетонов с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

XII ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

1. У Сергея 5 альбомов с фотографиями. Просматривая фотографии, он заметил, что в любых двух альбомах общее число всех фотографий принимает только 3 значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом фотоальбоме? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

2. На экваторе планеты Барраган все деревья одинаковые и растут вертикально вверх. Если все они упадут вдоль экватора в одну сторону (пусть на запад), то общая длина участков экватора, заваленных деревьями, составит 100 км. Докажите, что если все эти деревья упадут в противоположную сторону (на восток), то общая длина заваленных участков экватора тоже составит 100 км.

3. Врач дал больному один пакетик с одинаковыми таблетками и велел принимать ежедневно каждое утро по четверти таблетки. Больной так и сделал, причём каждое утро он вынимал из пакетика наугад, что попадётся. Если попадалась целая таблетка, пациент разламывал её на 4 равные части, одну из которых съедал, а остальные 3 части возвращал обратно. Если попадалась ранее отломленная четвертинка, то он её сразу проглатывал. После месяца такого лечения в пакетике осталось в 8 раз больше четвертинок, чем целых таблеток, а еще через три месяца в пакетике осталось всего 5 целых таблеток. Сколько в этот момент осталось четвертинок? Привести все возможные варианты ответа и доказать, что других нет.

4. Пусть действительные числа $a, b, c \geqslant 0$, и $a + b + c = 1$. Доказать неравенство

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}(c-a)^2} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2} \leqslant 2.$$

5. Найти множество значений функции $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + x) + \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$ при $x \neq 0$.

6. Можно ли через вершины куба провести 8 параллельных плоскостей (по одной через каждую вершину) так, чтобы все расстояния между соседними плоскостями были равны? Ответ обосновать.

Решения 5-6 класса

Решение 5-6.1. Существует ровно два способа расставить цифры требуемым образом: 41312432 и симметричный ему 23421314.

Ответ: Можно.

Решение 5-6.2. Дошкольник Миша рыл тоннель в $396/36 = 11$ раз дольше, чем метростроевцы, следовательно, 11 таких дошкольников, как Миша, сделали бы эту работу также быстро, как бригада метростроевцев. А если к этим 11-ти (с другой стороны) присоединился бы копать и сам Миша, то они копали бы в 12 раз быстрее, чем он сам, и вся работа была бы сделана за $396/12 = 33$ дня. Значит, Миша с бригадой копал бы также быстро, как с 11-ю дошкольниками, и работа была бы сделана за 33 дня.

Ответ: 33 дня.

Решение 5-6.3. Четвёртый портрет Юли располагается на 20-й странице, значит, в книге не менее 20 страниц. Если бы в книге встретилась 21-ая страница, то на ней была бы изображена седьмая по счёту закаляка, но закаляк всего 6. Значит, в книге нет 21-ой страницы, т. е. страниц не более 20. Поэтому их ровно 20.

Ответ: 20 страниц.

Решение 5-6.4. Обойдём каждый треугольник и каждый четырёхугольник. Всего мы пройдём путь в $20 + 25 = 45$ сантиметров. При этом каждый жирный отрезок пройден дважды, так как каждая из трёх составляющих его частей принадлежит ровно одному чёрному треугольнику, и ровно одному белому четырёхугольнику. А периметр большого треугольника мы прошли ровно один раз. Следовательно, не считая периметра, мы прошли путь, равный $45 - 18 = 27$ см. Поскольку мы проходили каждый из жирных отрезков дважды, общая сумма их длин равна $13,5$ см.

Ответ: $13,5$ см.

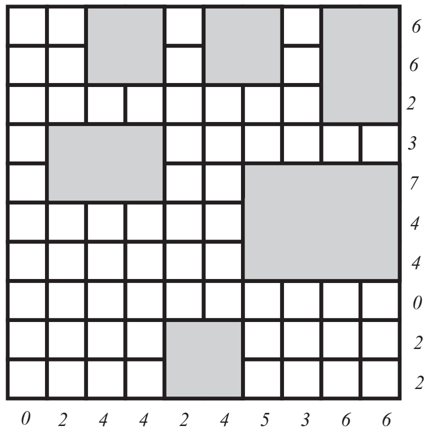
Решение 5-6.5. Если бы галка была права, то число дуболомов было бы кратно 6. Но оляпка утверждает, что после вычета 15 дуболомов их число будет чётно, то есть, что дуболомов — нечётное число. А сорока считает, что их число кратно трём только за вычетом генерала, следовательно общее число также не кратно трём. Следовательно, если галка была права, то были бы неправы и сорока, и оляпка. Но неправа только одна птица. Следовательно, галка правой быть не может. Тогда правы все остальные птицы. В частности, права синичка, утверждающая, что общее число дуболомов есть квадрат натурального числа, и прав воробей, сообщивший, что число дуболомов лежит в отрезке от 200 до 300. Этим двум условиям удовлетворяют три числа: 15^2, 16^2 и 17^2, под условия сороки и оляпки подходит только $17^2 = 289$.

Ответ: 289 дуболомов

Решение 5-6.6. Каждый из мальчиков имеет как минимум трёх братьев. Тогда они вчетвером — братья. Возьмём произвольно пятого мальчика. У него минимум три брата, значит он должен иметь брата, отличного от шестого и седьмого мальчиков, следовательно он брат первым четырём. Поскольку пятый мальчик брался произвольно, то все мальчики — братья.

Решения 7 класса

Решение 7.1.
Ответ: См. рисунок



К решению задачи 7.1

Решение 7.2. Пусть сторона основания коробки a см, тогда её высота будет равна $\frac{a}{2}$ см. Теперь если бантик находится сверху, то помимо бантика необходимо $4\cdot\frac{a}{2}+4a=6a$ сантиметров веревки. Если же бантик находится сбоку, то требуется $2\cdot\frac{a}{2}+6a=7a$ сантиметров верёвки (помимо бантика). Следовательно, при бантике сверху требуется на a сантиметров верёвки меньше, чем при бантике сбоку; по условию эта разность равна $178-156=22$ см. Следовательно, ширина коробки 22 сантиметра, а высота — 11 сантиметров. Проверка показывает, что при этом верёвки хватит, и на бантик уйдет $156-6a=24$ см верёвки.

Ответ: Ширина коробки — 22 см, а высота — 11 см.

Решение 7.3. Можно считать, что монеты пронумерованы, и их номера совпадают с номерами конвертов, в которых они лежат. Кроме того, суду изначально ясно, что если при некотором взвешивании на обоих чашах весов монет поровну, а весы не в равновесии, то на более лёгкой чаше фальшивых монет больше, чем на более тяжёлой. Эксперт может добиться своей цели как минимум двумя путями:

Первый путь. Эксперт первым взвешиванием сравнивает монету 1 и одну из настоящих. Настоящая перевешивает, следовательно суду становится ясно, что монета 1 — фальшивая. При втором взвешивании эксперт кладёт на одну чашу настоящую монету и монету 1, а на другую монеты 2 и 3. Первая чаша перевешивает, тогда суду понятно, что во второй чаше весов как минимум две фальшивых монеты, т. е. монеты 2 и 3 также фальшивые.

Второй путь. Сначала эксперт взвешивает монеты 1 и 4, как и при первом способе. Монета 4 перевешивает, следовательно она настоящая, а монета 1 — фальшивая. Затем эксперт кладёт на одну чашу монеты 1, 5 и 6, на другую — монеты 2, 3 и 4. Первая чаша перевешивает, следовательно на ней настоящих монет больше чем на второй. На второй чаше как минимум одна монета (монета 4) — настоящая, следовательно на первой чаше есть по крайней мере две настоящие, поэтому монеты 5 и 6 — настоящие. Аналогично, на второй чаше есть хотя бы две фальшивые монеты, тогда это монеты 2 и 3.

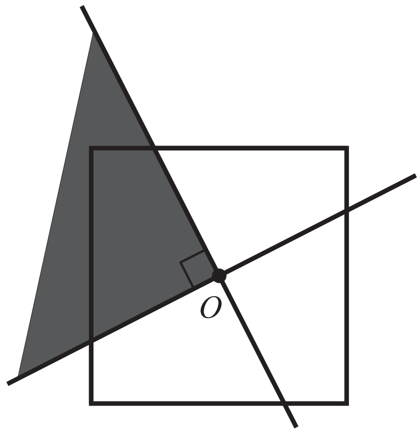
Решение 7.4. Легко убедиться (например, анализируя умножение чисел “столбиком”), что последняя цифра произведения определяется последними цифрами множителей. Заметим, что у любых последовательных десяти натуральных чисел в качестве последней цифры встречаются все 10 цифр от 0 до 9 (каждая по одному разу). Два таких числа (оканчивающиеся на 0 и 5) будут вычеркнуты, а произведение восьми оставшихся будет оканчиваться на ту же цифру, что и произведение $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$, т. е. на 6. Но тогда (так как произведение любого числа шестёрок оканчивается на 6) на 6 будет оканчиваться также произведение всех натуральных чисел от 1 до 2010 (после вычёркивания всех чисел, кратных пяти). Произведение $2011\cdot2012\cdot2013$ также оканчивается на 6, значит, последней цифрой числа N также будет цифра 6.

Ответ: 6.

Решение 7.5. Пусть прожектор находится в том положении, о котором говорится в задаче (т. е. освещает ровно четверть одной из сторон квадрата). Повернём прожектор на

90° по часовой стрелке. Теперь освещена другая часть квадрата, примыкающая к ранее освещённой. Так как при повороте квадрата вокруг своего центра на 90° квадрат остаётся на месте, то освещенная теперь часть квадрата в точности равна освещённой ранее, и поэтому имеет ту же площадь. Повторим операцию ещё два раза. Получим ещё две части квадрата, равные части, освещённой вначале. Заметим, что из четырёх рассмотренных участков собирается целый квадрат (каждая точка, попавшая внутрь квадрата, или попала внутрь ровно одного из участков или находится на их границе). Следовательно, площадь квадрата в четыре раза больше изначально освещенной. Итак, искомая площадь равна $\dfrac{4^2}{4} = 4$.

Ответ: 4.



К решению задачи 5

Решение **7.6.** ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Предположим противное, т. е. пусть по окончании турнира оказалось, что любые два пенсионера сыграли между собой ровно один раз, но каждый пенсионер не играл более двух партий подряд. В этом случае для каждого пенсионера и любой партии, в которой он играл, выполнена одна из трёх ситуаций: 1) пенсионер играет одну партию из двух подряд, в которых он принимал участие 2) играемая партия — самая первая, этот пенсионер уйдёт после её окончания (а его соперник будет играть следующую); 2) играемая партия — последняя в этом турнире (и его соперник играл предыдущую). Каждый игрок сыграл $12 - 1 = 11$ партий — число нечётное, поэтому все его партии на пары не разбиваются; таким образом каждый игрок побывал хотя бы раз или в первой, или во второй ситуации. Следовательно, игроков ровно 2, что противоречит условию.

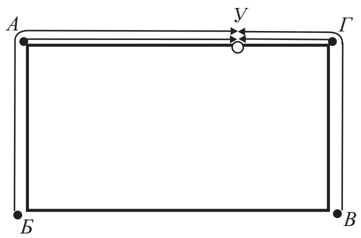
Решение **7.6.** ВТОРОЙ СПОСОБ. Пусть, от противного, ни один пенсионер не играл трёх партий подряд. Заметим, что всего было сыграно 66 партий и со второй по 64 партию наблюдалась следующая ситуация: пенсионер, который садится за доску, выигрывает партию (в противном случае его противник будет играть третью кряду) и проигрывает следующую (иначе ему самому придётся играть три партии подряд). Будем записывать участников каждой партии в порядке “побеждённый — победитель”, и упорядочим эти пары по времени проведения партий. Получим последовательность имён пенсионеров, причём внутри последовательности каждое имя встречается парами: победитель каждой партии и проигравший следующую — это один и тот же человек. Значит, если исключить первого и последнего в списке участника, то окажется, что имена всех других встречаются в этой последовательности попарно, эти пенсионеры сыграли чётное число партий. Но если каждый с каждым сыграл по одному разу, то каждый пенсионер сыграл ровно 11 раз — противоречие.

Решение **7.6.** ТРЕТИЙ СПОСОБ. Обозначим пенсионеров точками на плоскости, и, как только пенсионеры сыграют между собой партию, будем соединять соответствующие им точки линией. Математически это означает, что мы будем строить некоторый граф, точки называют вершинами графа, а линии — рёбрами. Кроме того, будем нумеровать рёбра натуральными числами в том порядке, в каком они будут появляться (т. е. номер ребра будет соответствовать порядковому номеру играемой партии). На момент, когда каждый пенсионер с каждым сыграет одну партию, мы получим так называемый полный граф — любые две вершины соединены ребром. Это означает, что к каждой вершине примыкает ровно 11 рёбер (говорят, что степень вершины равна 11). Если бы ни один пенсионер не играл трёх партий подряд, то последовательность рёбер 1—2—3—4— … образовала бы связную линию (на языке графов — цепь). Такая цепь, проходящая через все рёбра, называется эйлеровой. Из теории графов известно, что граф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен (т. е. от любой вершины до любой можно дойти по рёбрам), и все его вершины, кроме, возможно, двух, имеют чётную степень. Но в нашем графе это не так (все 12 вершин имеют нечётную степень), поэтому сделанное предположение неверно.

Ответ: Невозможно.

Решение **8.1.**

Назовём бортик, у которого стоит учительница, ближайшим. Заметим, что никому не выгодно идти вдоль бортика, противоположного ближайшему. Ребята, находящиеся на концах ближайшего бортика (на рисунке это школьники А и Г), должны пройти лишь по его части, вместе эти части образуют один ближайший бортик. Те из учеников, кто находится на концах противоположного бортика, должны пройти по одному боковому бортику и каждый из них по своей части ближайшего бортика: вместе два боковых и один ближайший. Вчетвером ученики должны пройти два ближайших и два боковых бортика. Вне зависимости от того, какой из бортиков длиннее, это суммарное расстояние равно $2 \cdot 10 + 2 \cdot 25 = 70$ метров. Втроём ученики прошли 50 метров, следовательно Гена не прошёл 20 метров, и именно столько прошла учительница.



К решению задачи 1

Ответ: 20 метров.

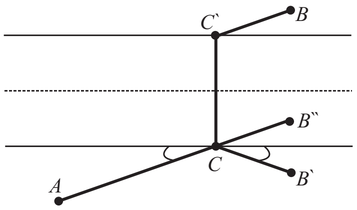
Решение **8.2.** Каждая из 6 команд сыграла с каждой из пяти остальных по разу, всего 5 матчей. Общее число матчей, сыгранных командами, равно $6 \cdot 5 = 30$, но каждый матч при этом посчитан дважды (по разу за каждую из команд – участниц), поэтому всего сыграно $30 : 2 = 15$ игр. Каждая результативная игра приносит 3 очка одной из команд, поэтому сумма всех очков, если бы не было ничьих, была бы равна 45. Каждая ничья даёт по 1 очку двум командам — всего 2 очка, поэтому с каждой ничьей ровно одно очко "теряется". Общая сумма очков равна $13+10+7+5+3+2 = 40$. Следовательно, потерялось $45 - 40 = 5$ очков, т. е. было 5 ничьих. Такая ситуация возможна: например, команда A выиграла у всех, кроме команды B, с которой сыграла вничью (набранное число очков 13). Команда B проиграла команде C, но выиграла у команд D, E и F (плюс ничья с A — 10 очков). Команда C выиграла у команд B и F, вничью сыграла с E, а остальным проиграла (7 очков). Команда D выиграла у C и сыграла вничью с командами E и F (5 очков); E сыграла вничью с командами C, D и F, проиграв остальным (3 очка), наконец, F сделала две ничьи с командами E и D, остальные матчи проиграла. Этот пример приведён в таблице.

команда	A	B	C	D	E	F	Всего
A	●	1	3	3	3	3	13
B	1	●	0	3	3	3	10
C	0	3	●	0	1	3	7
D	0	0	3	●	1	1	5
E	0	0	1	1	●	1	3
F	0	0	0	1	1	●	2

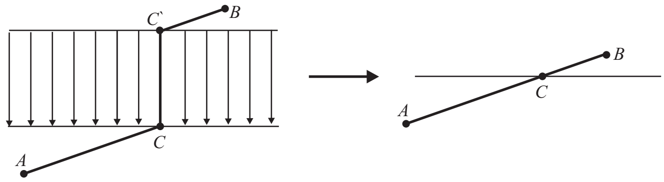
К решению задачи 2

Решение **8.3.** ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Заметим, что пересекать реку более одного раза не выгодно (выгоднее, например, вместо пересечения первой переправы пройти по прямой вдоль берега до второй), следовательно можно ограничиться путями, на которых мост в точности один. Будем обозначать у любого пути концы моста через C, C' (C на том же берегу, что и A, C' — на противоположном). Заметим, что поскольку река имеет одинаковую ширину, можно минимизировать длину не всего пути, а лишь длину пути по земле, то есть сумму путей AC и $C'B$.

Отразим точку B относительно прямой — середины реки, полученную точку обозначим через B'. У каждого пути можно часть пути после моста (путь $C'B$) также отразить, при этом путь $C'B$ перейдет в путь CB' той же длины. Следовательно, достаточно минимизировать сумму путей AC и CB', где точки A, B' заданы, а единственное ограничение — точка C должна лежать на том же берегу, что и точка A. Но эта задача хорошо известна, нужно выбрать точку C на берегу так, чтобы отрезки AC, CB' образовывали с берегом реки одинаковый угол ("угол падения равен углу отражения"), эти два отрезка будут искомым путём. В силу симметрии это эквивалентно тому, что отрезки AC и $C'B$ образуют с рекой одинаковые углы, т. е. параллельны. Итак, искомый путь — такая ломаная $ACC'B$, что CC' перпендикулярна реке, а отрезки $AC, C'B$ параллельны. Для построения точки C достаточно отразить точку B' относительно ближайшего берега реки и соединить образ (точку B'') с точкой A отрезком (см. рисунок).



К первому решению задачи 3



Ко второму решению задачи 3

<u>Решение 8.3.</u> ВТОРОЙ СПОСОБ. "Склеим" два берега реки по всякой паре точек берега, имеющей общий перпендикуляр. При этом всякий путь будет уменьшен на длину моста (или мостов, если их было несколько), а поскольку концы моста при этом действии "приклеятся" друг к другу, то путь перейдет также в путь. Реки уже нет, поэтому кратчайший путь (и единственный кратчайший путь) — отрезок AB. "Расклеим" реку обратно. Кратчайший путь увеличился на длину моста (точка пересечения одна), остальные увеличились не меньше, следовательно, кратчайший путь по прежнему единственный кратчайший. При расклейке отрезок AB превратился в два отрезка, соединённые мостом, но такая расклейка (как всякий параллельный сдвиг) не повлияла на параллельность, следовательно первый (до моста) и последний (после моста) отрезки полученного пути–ломаной обязаны быть параллельны.

Ответ: Ломаная $ACC'B$, где отрезок CC' перпендикулярен берегу, а отрезки AC и $C'B$ параллельны.

<u>Решение 8.4.</u> ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Опрашивали только школьников, участвовавших в олимпиадах, обозначим их общее число через $6x$. Поскольку, по условию, школьников, участвовавших по крайней мере в двух олимпиадах ровно в два раза меньше, чем тех, которые были не менее чем в одной, то, по крайней мере, в двух участвовал каждый второй опрошенный (то есть $3x$), столько же участвовали ровно в одной олимпиаде (тоже $3x$). Ответ "в трёх" был бы втрое реже, чем ответ "не менее, чем в одной", т. е. в трёх олимпиадах приняло участие ровно $2x$ человек. Следовательно, в точности на двух олимпиадах были ровно $2x - x = x$ участников.

Если просуммировать число участников каждой олимпиады, то получим $100+50+48 = 198$. С другой стороны, это число равно $1\cdot 3x + 2\cdot x + 3\cdot 2x = 11x$. Решая уравнение $11x = 198$, получаем $x = 18$. Следовательно, всего в олимпиадах участвовали $6x = 108$ человек.

<u>Решение 8.4.</u> ВТОРОЙ СПОСОБ. Построим круги Эйлера (см. рисунок), и пусть a, g и c — количества человек, участвовавших соответственно только в олимпиаде по математике, только в олимпиаде по информатике, только в олимпиаде по физике. Пусть также b человек участвовали во всех олимпиадах, кроме олимпиады по физике, d человек — кроме олимпиаде по информатике и f человек — кроме олимпиаде по математике, а во всех трёх олимпиадах участвовали e человек. По условию

$$a + b + d + e = 100, \tag{1}$$

$$c + b + e + f = 48, \tag{2}$$
$$d + f + e + g = 50. \tag{3}$$

Пусть общее число участников равно $x = a + b + c + d + e + f + g$. Тогда $b + d + e + f = x/2$ и $e = x/3$. Сложим уравнения (1), (2) и (3):

$$a + b + d + e + c + b + e + f + d + f + e + g = 198.$$

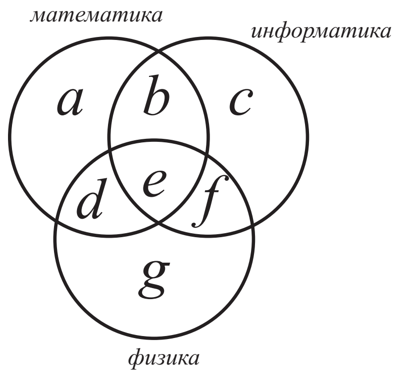
Сгруппируем левую часть:

$$(a + b + c + d + e + f + g) + (b + d + e + f) + e = 198,$$
$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 198.$$

Отсюда находим $x = 108$.

Комментарий. При втором способе несложно подобрать числа, удовлетворяющие всем пяти уравнениям, что доказывает непротиворечивость условия задачи. Ясно, что $e = 36$. Тогда $b + d + f = 18$, положим, например, $b = d = f = 6$. Тогда $a = 52$, $c = 0$, $g = 2$.

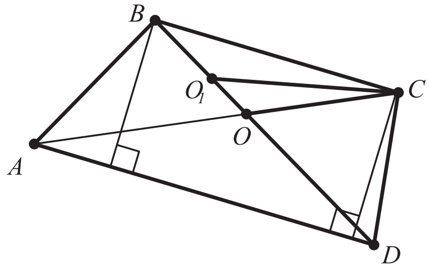
Ответ: 108 человек.



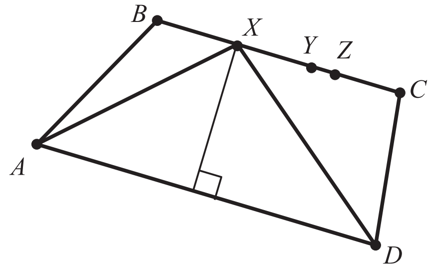
Ко второму решению задачи 4.

Решение **8.5.** ПЕРВЫЙ СПОСОБ.

Пусть O — точка пересечения диагоналей. По условию, один из треугольников ABD, CDO, BDO будет иметь площадь 1. Рассмотрим произвольную точку O_1, лежащую на отрезке OB. При разрезании на треугольники ABD, CDO_1, CBO_1 один из них обязан иметь площадь 1. Но площади треугольников CDO_1, CBO_1 при движении точки O_1 по отрезку BO изменяются непрерывно и монотонно. Следовательно, площадь 1 имел треугольник ABD. Аналогично показываем, что все треугольники CBD, ACD, ABC имеют ту же площадь. Рассмотрим пару треугольников ABD, ACD. Они равновелики, поэтому перпендикуляры, опущенные из точек B и C на прямую AD, равны, следовательно эти две высоты, отрезок BC, и часть прямой AD (между основаниями перпендикуляров) образуют прямоугольник, в частности $AD \parallel BC$. Аналогично показывается параллельность другой пары сторон. Поскольку параллелограмм $ABCD$ разрезается по диагонали на два треугольника единичной площади, то он имеет площадь 2.



К первому решению задачи 5.



Ко второму решению задачи 5.

Решение **8.5.** ВТОРОЙ СПОСОБ. Возьмём произвольную точку X на стороне BC — см. рисунок. Разобьём четырёхугольник на треугольники ABX, CDX и AXD.

Среди них есть треугольник единичной площади, можно полагать, что это — треугольник AXD. (Если это не так, и, например, $S_{ABX} = 1$, то рассмотрим вместо X точку Y из интервала XC, тогда $S_{ABY} > 1$, а если окажется, что $S_{CDY} = 1$, то вместо X рассмотрим произвольную точку Z из интервала YC, — тогда $S_{AZB} > 1$, $S_{CZD} < 1$). Таких точек X (что $S_{AXB} = 1$) на отрезке BC бесконечно много, как следует из приведённого выше рассуждения. Но это означает, что расстояние от всех этих точек до прямой AD (по сути это высота треугольника AXD) одно и то же, а это означает параллельность прямых BC и AD. Аналогично параллельны прямые AB и CD, т. е. четырёхугольник — параллелограмм. Тогда его площадь в два раза больше площади треугольника AXD, т. е. равна 2.

Решение **8.6.** Если одновременно $a \geqslant c$ и $b \geqslant d$, доказывать нечего. Пусть, например, $b < d$. Тогда из первого неравенства $a - c \geqslant (d + b)(d - b) \geqslant d - b$, так как каждое слагаемое в первой скобке больше $1/2$, а вторая скобка должна быть положительной. Отсюда имеем $a - c \geqslant d - b$, т. е. выполнено требуемое неравенство. Аналогично, при помощи второго неравенства разбирается случай $a < c$.

<u>Решение **9.1.**</u> Заметим, что перед первым появлением в последовательности натурального числа $n+1$ стоит число 1, два числа 2, три числа 3 и т.д. всего $1+2+\ldots+n$ чисел, по формуле арифметической прогрессии их количество равно $(n^2+n)/2$. Отметим, что $63^2=3969, 63^2+63=4032$. Отсюда получаем, что на 2016-м месте в последовательности Буратино в последний раз появляется число 63. Следовательно, и на 2013-м месте будет также же.

Ответ: 63.

<u>Решение **9.2.**</u> Достаточно заметить, что $t_+=\frac{1}{2}(t+|t|)$, заменить в левой части все три “срезки”, и привести подобные.

<u>Решение **9.3.**</u> Пусть такая последовательность построена, и пусть первые n многочленов ($n\in\mathbb{N}$) были различны, а $(n+1)$-й многочлен совпал с первым. Для любого натурального числа k коэффициенты k-го многочлена являются корнями $(k+1)$-го, поэтому по теореме Виета выполняются равенства

$$a_k\cdot b_k=b_{k+1}\quad(1)\qquad\qquad a_k+b_k=-a_{k+1}\quad(2).$$

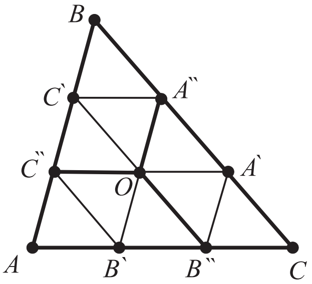
Применяя n раз равенства (1), имеем $b_1=b_{n+1}=a_n\cdot b_n=a_n\cdot a_{n-1}\cdot b_{n-1}=a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot b_{n-2}=\ldots=a_n\cdot a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_1b_1$. Отсюда следует, что или $b_1=0$, или $a_1a_2a_3\ldots a_n=1$.

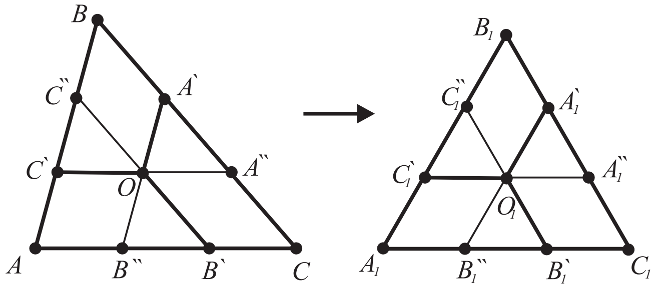
Если $b_1=0$, то и все b_k равны нулю. Тогда из равенств (2) следует, что $a_2=-a_1$ и $a_3=-a_2=a_1$, поэтому третий многочлен совпадает с первым. Если $a_1=0$, то равны все многочлены последовательности (они имеют вид $y=x^2$). В этом случае $n=1$. Если же $a_1\neq 0$, то первый и второй многочлены различны ($n=2$), и легко проверить, что для любого a условие задачи выполнено: корни многочлена $y=x^2+ax$ являются коэффициентами многочлена $y=x^2-ax$ и наоборот. Далее будем считать, что все b_k не равны нулю.

В этом случае $a_1a_2a_3\ldots a_n=1$, и, поскольку все эти коэффициенты целые, $|a_k|=1$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Из равенства (2) с учётом того, что $b_k\neq 0$, получаем, что случай $a_k=-a_{k+1}$ невозможен, поэтому либо все a_k равны 1, либо все они равны -1. Тогда из той же формулы (2) находим, что $b_k=-2a_k$, т.е. все многочлены совпадают (они либо все имеют вид $y=x^2-x+2$, либо вид $y=x^2+x-2$). Обе последовательности удовлетворяют условию, при этом $n=1$.

Ответ: $n=1, n=2$.

<u>Решение **9.4.**</u> ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Отметим на сторонах треугольника точки: на AC точки B' и B'' так, что $AB'=B'B''=B''C$, на AB — точки C' и C'' так, что $BC'=C'C''=C''A$, на BC — точки A' и A'' так, что $CA'=A'A''=A''C$ (см. рисунок). По теореме Фалеса прямые $C'A''$, $C''A'$ и AC будут параллельны; это же относится к прямым $A''B'$ и AB. Пусть прямые $A'C''$ и $B'A''$ пересекаются в точке O. Четырёхугольник $AC''OB'$ — параллелограмм, поэтому $C''O=AB'=\dfrac{b}{3}$, где $b=AC$. Тогда площадь трапеции $AC''OB''$ равна $\dfrac{C''O+AB''}{2}\cdot h_O=\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{h_b}{3}=\dfrac{S_{ABC}}{3}$ (здесь h_O — высота рассматриваемой трапеции, а h_b — высота треугольника, опущенная на сторону AC; ясно, что $h_O=\dfrac{h_b}{3}$). Аналогично показывается, что $S_{CB''OA''}=S_{BA''OC''}=\dfrac{S_{ABC}}{3}$. Остаётся заметить, что трапеции $AC''OB''$, $CB''OA''$ и $BA''OC''$ составляют треугольник ABC.





К первым двум решениям задачи 4 к третьему решению задачи 4

<u>Решение 9.4.</u> ВТОРОЙ СПОСОБ. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Проведем через нее отрезки $A'B'', A''C', B'C''$ соответственно параллельно AB, AC, BC, при этом точки A', A'', точки B', B'', точки C', C'' поставим на сторонах BC, AC, AB соответственно. Проведём отрезки $A''C'$, $C''B'$ $B''A'$ — см. рисунок.

Покажем, что трапеции $B'OA'C$, $C'OB'A$, $A'OC'B$ равновелики. Для этого достаточно доказать, что все 9 треугольников, на которые разбит треугольник ABC равны друг другу, поскольку каждая трапеция состоит ровно из трёх таких треугольников. Треугольник $C''BA'$ подобен треугольнику ABC, но тогда BO — медиана в $C''BA'$, следовательно $C''O = OA'$. Аналогично $C'O = OB''$ и $A''O = OB'$. Но тогда треугольники $B'OB'', C''C'O, OA''A'$ равны друг другу по стороне и двум прилежащим к ней углам. Треугольники $OB'C''$, $A'B''O$, $A''OC'$ по двум сторонам и углу между ними равны соответственно треугольникам $OA''A'$, $C''C'O$, $B'OB''$. Итак, все эти шесть треугольников равны друг другу. Кроме того, поскольку $AC''OB'$ — параллелограмм, то равны треугольники $AC''B'$ и $OB'C''$ (свойство диагонали параллелограмма). Аналогично треугольники $C'BA''$, $B''A'C$ равны соответственно треугольникам $A''OC'$, $A'B''O$. Итак, все девять внутренних треугольников равны друг другу. Следовательно, все три трапеции равновелики.

<u>Решение 9.4.</u> ТРЕТИЙ СПОСОБ. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Проведём через неё отрезки $A'B'', A''C', B'C''$ соответственно параллельно AB, AC, BC, при этом точки A', A'', точки B', B'', точки C', C'' поставим на сторонах BC, AC, AB соответственно.

Покажем, что трапеции $B'OA'C$, $C'OB'A$ и $A'OC'B$ равновеликие. Проведём аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. Такое преобразование переводит прямые в прямые, параллельные прямые в параллельные прямые, середины отрезков в середины отрезков, то есть $B_1'O_1A_1'C_1$, $C_1'O_1B_1'A_1$, $A_1'O_1C_1'B_1$ — также трапеции, а O_1 по-прежнему точка пересечения медиан. Эти трапеции равновелики, и даже равны (переходят друг в друга поворотом вокруг точки O_1 на $120°$). Обратное преобразование (также аффинное) переводит равновеликие фигуры в равновеликие, следовательно трапеции $B'OA'C$, $C'OB'A$, $A'OC'B$ также равновелики.

Ответ: Можно.

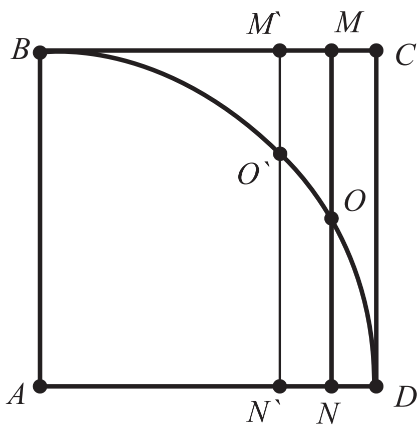
Решение **9.5.** Спустя месяц лечения количество оставшихся четвертинок кратно 8, что составляет целое число таблеток. Тогда за этот месяц было съедено (по частям) целое число таблеток, а поскольку каждый день съедалась четвертинка, то количество таких дней (в первом месяце лечения) делится на 4. Это возможно, только если первый месяц содержит 28 февраля невисокосного года. Тогда последующие три месяца составляют $30 + 31 + 30 = 92$ дня ровно, и за это время будет съедено ровно 23 таблетки.

Пусть после месяца лечения осталось x таблеток и $8x$ четвертинок. Заметим, что за один день может добавиться не более трёх четвертинок, значит, за первый месяц может образоваться не более 84 четвертинок. Из условия $8x \leqslant 84$ получаем $x \leqslant 10$. Далее, после месяца лечения осталось лекарства (в таблетках и четвертинках) $3x$ таблеток, а после ещё 92 дней лечения будет только $3x - 23$ таблетки. Это количество образуется 5-ю целыми таблетками и n четвертинками; из уравнения $3x-23 = 5+n/4$ получаем, что $n = 4(3x-28)$. Число $3x - 28$ должно быть неотрицательным, поэтому $x \geqslant 10$. Но тогда $x = 10$, а $n = 8$. Легко видеть, что эта ситуация может быть реализована.

Ответ: 8 четвертинок.

Решение **9.6.** Отметим на дуге точку O так, что $\angle DAO = 30^o$. Покажем, что положение отрезка MN искомое, если он проходит через точку O. При этом, в частности, $ON = OM$, поскольку $\sin 30^o = \frac{1}{2}$.

Пусть $M'N'$ — какой-то другой разрез исходного квадрата, пусть точка O' — пересечение дуги и отрезка $M'N'$. Достаточно показать, что суммарная площадь S криволинейных треугольников BMO и OND меньше, чем S' — суммарная площадь криволинейных треугольников $BM'O'$ и $O'N'D$.



К решению задачи 6

Рассмотрим случай, когда точка O' находится на дуге BO, тогда $O'N' > OM'$. В этом случае площадь S' получается из S уменьшением на $S_{O'M'MO}$ и увеличением на $S_{O'N'NO}$. Но $S_{O'N'NO} > NN' \cdot ON = MM' \cdot OM > S_{O'M'MO}$ так как $O'N' > OM'$. Следовательно, в этом случае $S' > S$.

Рассмотрим случай, когда точка O' находится на дуге DO, тогда $O'N' < OM'$. В этом случае площадь S' получается из S увеличением на $S_{O'M'MO}$ и уменьшением на $S_{O'N'NO}$. Но $S_{O'N'NO} < NN' \cdot ON = MM' \cdot OM < S_{O'M'MO}$, так как $O'N' < OM'$. Следовательно, и в этом случае $S' > S$.

Ответ: Разрез MN должен проходить через точку пересечения окружности и параллельной AD средней линии квадрата.

Решения 10 класса

Решение **10.1.** Когда Д. В. разложил гири в четыре кучки, по крайней мере в двух из них оказалось по одной гире. Ясно, что веса этих гирь по $1/4$ кг. Когда гири раскладывал С. Э., эти две гири были в разных кучках (так как $2 \cdot 1/4 > 1/3$). Кроме того, ни одна гиря не может весить более $1/4$ кг (иначе Д. В. не удалось бы разложить гири так, как он это сделал), поэтому у С. В. в каждой кучке ровно 2 гири. Значит, вторая гиря в той кучке, где лежит 250-граммовая гиря, имеет вес $1/3 - 1/4 = 1/12$ кг. Снова рассмотрим разложение у Д. В. Если эти две гири по $1/12$ кг лежат в одной кучке, то там лежит ещё одна гиря весом $1/12$ кг, и тогда последняя кучка (весом $1/4$ кг) состоит также из одной гири. Если же гири по $1/12$ кг лежат в разных кучках, то с ними лежит ещё по одной гире весом $1/4 - 1/12 = 1/6$ кг.

Ответ: Два варианта: либо три гири по $1/4$ кг и три по $1/12$ кг, либо две гири по $1/4$ кг, две — по $1/6$ кг, две — по $1/12$ кг.

Решение **10.2.** ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Всего бабуля купила за 4 дня 10 булок, а потратила 184 рубля, значит булка хлеба стоит не меньше 18 рублей 40 копеек (ведь бабуле дали какую-то скидку), но меньше 19 рублей (иначе бабуля потратила бы минимум 190 рублей). Будем называть излишком остаток от деления на 18 числа рублей, потраченных бабулей за день (каждый день излишек свой). В первый день излишек равен нулю, каждый следующий излишек не меньше предыдущего, но не больше, чем на 1, кроме того сумма всех излишков равна $184 - 180 = 4$. Этого достаточно, чтобы перебором найти единственный вариант распределения излишков по дням: 1 — во второй, 1 — в третий, 2 — в четвёртый. Пусть булка хлеба стоит 18 рублей n копеек. Тогда (из анализа остатков) $2n \geqslant 100$, $3n < 200$, $200 \leqslant 4n < 300$, что равносильно неравенству $50 \leqslant n \leqslant 66$. Значит 10 булок стоят от 185 рублей 00 копеек до 186 рублей 60 копеек. Самая большая скидка из возможных — 2 рубля 60 копеек.

Решение **10.2.** ВТОРОЙ СПОСОБ. Заметим, что при повышении стоимости булки каждая покупка бабули будет стоить дороже, поэтому самая большая скидка будет при самой высокой из возможных цен (за одну булку), при которой описанная ситуация возможна. Иными словами, если эту цену увеличить хоть на 1 копейку, то бабуся даже с учётом скидок должна будет заплатить больше 184 руб. Покажем, что такой ценой будет цена булки, равная 18 рублям 66 копейкам. В самом деле, эта цена подходит под условие задачи (18+37+55+74=184), а уже при цене 18 рублей 67 копеек в третий день бабуля должна заплатить 56 рублей, а в остальные не меньше, следовательно, она заплатит не меньше 185 рублей. Итак, максимально возможная стоимость 10 булок — 186 рублей 60 копеек, максимально возможная скидка — 2 рубля 60 копеек.

Ответ: 2 рубля 60 копеек.

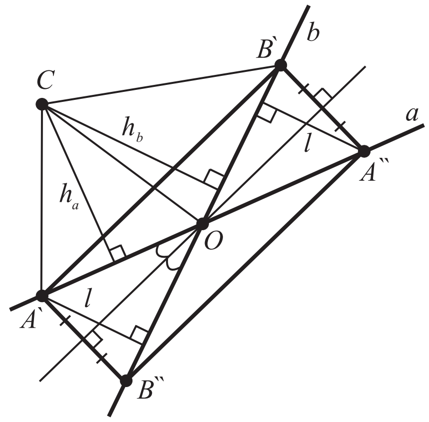
Комментарий: Пусть x — стоимость хлеба в рублях ($[x]$ — стоимость хлеба в рублях за вычетом копеек). В задаче предлагается из уравнения $[x]+[2x]+[3x]+[4x] = 184$ найти наибольшую дробную часть числа x, т. е. $\{x\}$, и выразить её в копейках.

Решение **10.3.** Пусть число a_{k_0} наибольшее, при этом, если таковых чисел несколько, выберем номер k_0 наименьшим из возможных. Предположим противное, т. е. пусть среди чисел a_k есть положительные. Тогда $a_{k_0} > 0$, поэтому $k_0 \neq 1$ и $k_0 \neq n$, значит, существуют числа a_{k_0-1} и a_{k_0+1}. В силу выбора номера k_0 $a_{k_0-1} < a_{k_0}$ и $a_{k_0} \geqslant a_{k_0+1}$. Но тогда $a_{k_0-1} + a_{k_0+1} < 2a_{k_0}$ — противоречие.

Решение **10.4.** ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Обозначим две пересекающиеся прямые через a и b; точку пересечения обозначим через O (см. рисунок). Отметим на прямой a пару точек A', A'', удалённых на расстояние l от прямой b. Эти две точки принадлежат искомому ГМТ. Отразим эти точки относительно одной из прямых — биссектрис угла, образованного прямыми a и b. Получим две точки B', B'' на прямой b, причём по построению $OB' = OB'' = OA' = OA''$ — см. рисунок. Покажем, что объединение отрезков $A'B', B'A'', A''B'', B''A'$ (граница прямоугольника $A'B'A''B''$) и есть искомое ГМТ.

Рассмотрим произвольную точку C, эта точка лежит в одном из углов $A'OB'$, $B'OA''$, $A''OB''$, $B''OA'$ (возможно, на границе). Без ограничения общности, пусть точка C принадлежит углу $A'OB'$. Пусть h_a, h_b — расстояния от точки C до прямых a и b соответственно. Заметим, что $S_{OA'C} = \dfrac{OA' \cdot h_a}{2}$, $S_{OB'C} = \dfrac{OA' \cdot h_b}{2}$, откуда $\dfrac{h_a + h_b}{2} = \dfrac{S_{OA'C} + S_{OB'C}}{OA'}$. В частности, для $C = A'$ получаем $\dfrac{l}{2} = \dfrac{l+0}{2} = \dfrac{S_{OA'B'} + S_{OB'B'}}{OA'} = \dfrac{S_{OA'B'}}{OA'}$. Но C принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда $h_a + h_b = l$, т. е. $S_{OA'C} + S_{OB'C} = S_{OA'B'}$. Последнее равенство эквивалентно тому, что треугольник $OA'B'$ делится на два треугольника $OA'C$, $OB'C$ (возможно один из них вырожден), т. е. точка C принадлежит отрезку $A'B'$. Аналогично анализируются случаи, когда точка C попадает в один из трёх углов.

<u>Решение 10.4.</u> ВТОРОЙ СПОСОБ. Заметим, что расстояние от фиксированной точки прямой до других её точек представляет собой функцию, линейную на каждом луче, на которые разбивает прямую фиксированная точка. Аналогично, расстояние от точки до фиксированной прямой в плоскости представляет собой функцию, линейную в каждой из двух полуплоскостей, образованных этой прямой (причем полуплоскость можно рассматривать вместе с границей). Тогда сумма расстояний до двух пересекающихся прямых является линейной функцией в каждом из тех четырех углов, на которые плоскость разбивается прямыми.



К решению задачи 4

Рассмотрим одну из прямых, на ней имеется ровно две точки (в каждой полуплоскости — своя), расстояние от которых до второй прямой равно l. Но тогда для этих точек искомая сумма расстояний равна l, то есть они из искомого ГМТ. Обозначим пары (для каждой из прямых a и b) таких точек, через A', A'' и B', B'' соответственно. Обозначим точку пересечения прямых a и b через O.

Прямые a и b разбивают плоскость на четыре угла, рассмотрим любой из них, например, $A'OB'$. Выше замечено, что точки A', B' принадлежат искомому ГМТ, и в этом углу сумма расстояний — линейная фунция, следовательно весь отрезок $A'B'$ принадлежит искомому ГМТ.

Осталось заметить, что другие точки из этого угла не могут принадлежать ГМТ. Это можно сделать многими способами, в том числе, и через понятие линейности. Ясно, что точка O не принадлежит ГМТ. Возьмём в углу $A'OB'$ некоторую точку $C \neq O$ не из отрезка $A'B'$. На луче OC сумма расстояний линейна, принимает значение 0 в точке O и значение l в точке пересечения этого луча с отрезком $A'B'$, следовательно, значение l она нигде больше на луче принимать не может, в том числе, и в точке C. Таким образом, любая не лежащая на отрезке $A'B'$ точка C из угла $A'OB'$ не принадлежит ГМТ. Перебирая все 4 угла, получаем, что искомое ГМТ — объединение отрезков $A'B'$, $A'B''$, $A''B'$, $A''B''$.

Ответ: Стороны прямоугольника, каждая вершина которого находится на одной из данных прямых и удалена от другой прямой на расстояние l.

<u>Решение 10.5.</u> Смотрите 7.6.

<u>Решение 10.6.</u> Каждое натуральное число имеет при делении на 9 тот же остаток,

что и сумма его цифр. Рассмотрим произвольное число, составленное из жетонов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сумма его цифр равна 28, следовательно, остаток от деления на 9 у любого такого числа равен 1. Отсюда следует, что если одно из этих чисел делится на другое, то их частное при делении на 9 имеет остаток 1. Тогда частное или равно 1 (что невозможно, поскольку числа различны), или не меньше 10, что тоже невозможно, поскольку делятся числа с одинаковым числом цифр.

Решения 11 класса

<u>Решение 11.1.</u> Если бы число фотографий было различно во всех пяти альбомах, то их число — в первом со вторым, в первом с третьим, в первом с четвёртым, в первом с пятым — принимали бы ровно четыре разных значения. Значит, есть альбомы с одинаковым числом фотографий. Составим из них пару, в сумме в них чётное число фотографий, то есть 88. Следовательно, в каждом из них по 44 фотографии. Назовём альбомы с 44 фотографиями средними. В одной из пар альбомов всего 101 фотография, тогда в ней имеется альбом с числом фотографий больше, чем в среднем альбоме (назовём такие альбомы большими). Составим из большого и среднего пару; тогда в них всего 101 фотографии. Следовательно, в каждом большом альбоме $101 - 44 = 57$ фотографий. Таких альбомов в точности один, иначе такая пара больших альбомов содержала бы 114 фотографий. Аналогично показывается существование альбома с числом фотографий меньше среднего (маленького), размер каждого такого альбома ($75 - 44 = 31$ фотография), аналогично обосновывается его единственность. Поскольку найдено количество больших и маленьких альбомов (по одному), то мы знаем количество средних альбомов: $5 - 1 - 1 = 3$.

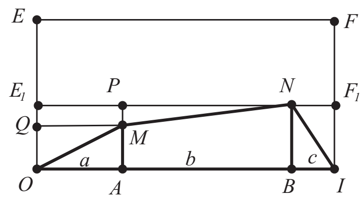
Ответ: три альбома содержат по 44 фотографии, один альбом — 57, один — 31 фотографию.

<u>Решение 11.2.</u> ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Пусть длина ствола у всех деревьев на экваторе равна l. Пусть все они упали на запад. Мысленно перетащим их на восток на расстояние $2l$. Длина заваленных участков не изменилась. Перевернём каждое на 180 градусов так, чтобы комель и крона поменялись местами. Длина заваленных участков снова не изменилась. Однако сейчас деревья находятся в положении, в котором они оказались бы, если бы сразу упали на восток. Итак, длина заваленных участков не изменится.

<u>Решение 11.2.</u> ВТОРОЙ СПОСОБ. Поскольку длина экватора неизменна, то общая длина заваленных участков не изменится тогда и только тогда, когда не изменится общая длина незаваленных участков, в частности, достаточно доказать что число и длины незаваленных участков не зависят от направления. Незаваленный участок возникает тогда и только тогда, когда пара ограничивающих его деревьев — соседи, расстояние между которыми больше их высоты. В какую бы сторону (на восток или на запад) не повалили такие деревья, длина незаваленного участка между ними будет равна разности расстояния между ними и их высоты. Поэтому и суммарная длина незаваленных участков не может измениться.

<u>Решение 11.3.</u> Смотрите 9.5.

<u>Решение 11.4.</u> ПЕРВЫЙ СПОСОБ. На отрезке OI длины 1 отложим точки A и B так, чтобы $OA = a$, $AB = b$, $BI = c$. Можно полагать, не ограничивая общности, что $b \geqslant a$ и $b \geqslant c$. Проведём в точках A и B перпендикуляры к прямой OI и отложим на них в одну полуплоскость отрезки $AM = \dfrac{b-a}{2}$ и $BN = \dfrac{b-c}{2}$. Тогда в левой части исходного неравенства стоит длина ломаной $OMNI$. Доказать, что она не превосходит двух, легко, так как эта ломаная лежит целиком в прямоугольнике $OEFI$ со стороной $OE = 1/2$, и не превосходит суммы длин сторон $OE + EF + FI$. Последнее можно обосновать, например, так: проведём через точку N (или через точку M, если эта точка окажется дальше, чем точка N от прямой OI) прямую E_1F_1 параллельно



К первому решению задачи 4.

прямой EF и продолжим отрезок AM до пересечения с этой прямой в точке P — см. рисунок. Теперь видно, что

$$\begin{aligned} OM+MN+NC &< OQ+QM+MP+PF_1+F_1I = \\ =OE_1+E_1F_1+F_1I &< OE+EF+FI = 1/2+1+1/2 = 2. \end{aligned}$$

Решение 11.4. ВТОРОЙ СПОСОБ. Для любых неотрицательных чисел a и b верно неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$ (доказывается почленным возведением в квадрат). Применим это неравенство трижды:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{4}(b-c)^2}+\sqrt{b^2+\frac{1}{4}(a-c)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{4}(b-a)^2} \leqslant$$

$$\leqslant a+\frac{|b-c|}{2}+b+\frac{|a-c|}{2}+c+\frac{|b-a|}{2} = a+b+c+\frac{|b-c|+|a-c|+|b-a|}{2}.$$

Можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$, тогда $|b-c|+|a-c|+|b-a| = 2a-2c \leqslant 2a+2b+2c = 2$, и доказываемое неравенство очевидно.

Решение 11.5. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}(1+x)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$. Заметим, что если бы $\alpha+\beta = \pi/2+\pi k$ для некоторого целого k, то $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = 1$, что невозможно в силу того, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = (1+x)\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \neq 1$ при $x \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{1+x+1+\dfrac{2}{x}}{1-(1+x)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = -1.$$

Значит, $f(x) = \operatorname{arctg}(-1)+\pi n = -\pi/4+\pi k$, где k — целое число. В этом равенстве $k=0$ или $k=-1$, так как в силу определения функции $\operatorname{arctg} t$ имеем $-\pi < f(x) < \pi$. Следовательно, область значений может содержать лишь числа $3\pi/4, -\pi/4$. Остаётся подобрать такие числа x_1, x_2, что $f(x_1) = -\pi/4$ и $f(x_2) = 3\pi/4$. Для этого годятся любое положительное число x_2 (в частности, $x_2 = 1$) и, например, $x_1 = -1$.

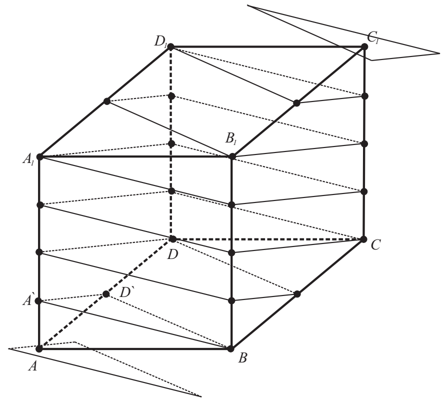
Ответ: двухэлементное множество $\{-\pi/4, 3\pi/4\}$.

Решение 11.6. ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Пусть дан куб $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Отложим от точки A вектор $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}$, его конец обозначим через A'; отложим от точки A вектор $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, его конец обозначим через D'. Плоскость, проходящую через точки A', D', B, назовём второй. Проведём параллельно ей плоскость через точку A, назовём эту плоскость первой. Проведём по другую сторону от второй плоскости последовательно плоскости с третьей по восьмую, соблюдая промежуток, как между первыми двумя. Покажем, что эти плоскости искомые.

Поскольку вторая плоскость проходит через середину отрезка AD и точку D', а первая — через точку A, то третья плоскость пройдёт через точку D. Вектор $\overrightarrow{AD}$ переносит первую плоскость в третью, тогда вторую он перенесет в четвёртую. Поскольку $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, точка C лежит в четвёртой плоскости. Вектор $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}$ переносит первую плоскость во вторую, тогда вектор $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$ перенесёт первую плоскость в пятую, вторую — в шестую, третью — в седьмую, четвёртую — в восьмую, т. е. точки A_1, B_1, D_1 и C_1 лежат на пятой, шестой, седьмой и восьмой плоскостях соответственно. Следовательно, каждая плоскость проходит через свою вершину, т. е.построенные плоскости — искомые.

Решение **11.6.** ВТОРОЙ СПОСОБ. Рассмотрим куб со стороной 1. Построим систему координат так, чтобы $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(0,1,1)$, $D_1(1,1,1)$. Тогда плоскости $x+2y+4z=n$, где n пробегает целые числа от 0 до 7, параллельны, находятся на одном расстоянии друг от друга, и каждая проходит ровно через одну вершину куба $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Это легко понять интуитивно, строгое доказательство оставляем читателю.

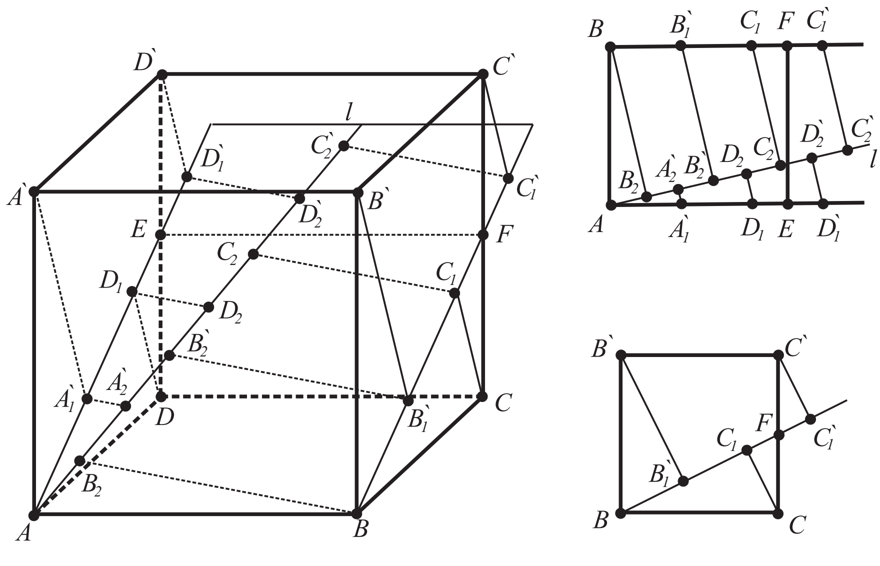
Решение **11.6.** ТРЕТИЙ СПОСОБ. Для положительного ответа на вопрос задачи достаточно указать в пространстве прямую l с таким свойством: если спроецировать вершины куба на l, то расстояния между соседними проекциями окажутся одинаковыми. Действительно, в этом случае плоскости, проходящие через проекции и перпендикулярные прямой l, очевидно, искомые. Построим такую прямую.



К первому решению задачи 6.

Пусть дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $AB=a$. Рассмотрим плоскость, проходящую через ребро AB и через точку F — середину ребра CC'. Пусть C_1, D_1, A_1', B_1', C_1' и D_1' — проекции на эту плоскость вершин C, D, A', B', C' и D' соответственно. Эти проекции лежат в плоскостях боковых граней (т. е. на прямых BF и AE). Докажем этот факт на примере точки C (для остальных точек аналогично). Пусть точка X прямой BF такова, что $CX \perp BF$. Так как прямая AB перпендикулярна плоскости BCF, то она перпендикулярна любой прямой из этой плоскости, в частности, $AB \perp CX$. Тогда прямая CX перпендикулярна двум не параллельным прямым плоскости ABF, т. е. перпендикулярна всей плоскости. Значит, точки X и C_1 совпадают.

Покажем, что $BB_1' = B_1'C_1 = C_1C_1'$, то есть, что отрезок BC_1' разбивается точками B_1', C_1 на три равные части. Действительно, отрезки $BC_1, B_1'C_1'$ равны как проекции равных сторон BC и $B'C'$, поэтому осталось показать, что $BB_1' = BC_1/2$. Это верно, поскольку $C_1C = BC_1/2$ из подобия треугольников BCC_1 и BFC, а $BB_1' = C_1C$ в силу поворота квадрата $BCC'B'$ на 90^o.



К третьему решению задачи 6.

Рассмотрим некоторую прямую l, лежащую в плоскости ABF и проекции точек A, B, C_1, D_1, A_1', B_1', C_1' и D_1' на эту прямую. (Эти проекции будем обозначать с помощью нижнего индекса 2, например, C_2 — проекция точки C_1.) По теореме о трёх перпендикулярах они будут также проекциями вершин куба на эту прямую. По теореме Фалеса получим, что $B_2B_2' = B_2'C_2 = C_2C_2'$ и $A_2A_2' = A_2'D_2 = D_2D_2'$. Остаётся провести прямую l так, чтобы точка B_2 оказалась серединой отрезка A_2A_2'.

По теореме Фалеса точка B_2 будет серединой A_2A_2' тогда и только тогда, когда луч BB_2 будет пересекать середину отрезка AA_1'. Проведем луч из B', проходящий через эту середину. Тогда искомая прямая l должна быть перпендикулярна лучу и проходить через B, то есть нам достаточно в качестве l взять перпендикуляр из точки B на этот луч.

Любая прямая, параллельная прямой l, будет обладать нужным свойством: расстояния между соседними проекциями вершин на эту прямую одинаковы. Задача решена.

Решение **11.6.** ЧЕТВЁРТЫЙ СПОСОБ. Рассмотрим квадрат $ABCD$. Проведём в плоскости ABC параллельно BD прямые l_A, l_B, l_C, l_D через точки A, B, C, D соответственно. Назовем каждую из точек A, B, C, D центром соответствующей ей прямой (прямые l_B и l_D, как геометрическое место точек, совпадают, но центры имеют разные). Отметим, что прямые симметричны относительно диагонали BD, а расстояние между прямыми l_A и l_B больше расстояния между l_B и l_C.

Каждую прямую (из списка l_A, l_B, l_C, l_D) начнём поворачивать вокруг её собственного центра; поворачивать их будем в плоскости ABC (в направлении обхода $ABCD$), и все на один и тот же угол. При таком повороте по–прежнему все прямые будут параллельны друг другу и симметричны относительно диагонали BD. Если повернуть прямые на 45^o, то прямая l_A совместится с l_B, а прямые l_B и l_C будут параллельны друг другу, т. е. расстояние между прямыми l_A и l_B уже меньше расстояния между прямыми l_B и l_C. Следовательно, при некотором повороте (на угол меньше 45^o) эти расстояния будут равны. Тогда при этом повороте с ними совпадёт и расстояние между l_C и l_D (симметрия относительно диагонали BD). Полученное при таком повороте расположение прямых назовём l_A^0, l_B^0, l_C^0, l_D^0. Эти прямые параллельны друг другу, проходят каждая через свою вершину, и расстояние между l_A^0 и l_B^0, l_B^0 и l_D^0, l_D^0 и l_C^0, одинаково. Назовём пары $(l_A^0, l_B^0), (l_B^0, l_D^0), (l_D^0, l_C^0)$ соседями.

Проведём параллельно прямым l_A^0, l_B^0, l_C^0, l_D^0 ещё четыре параллельных прямые l_A^1, l_B^1, l_C^1, l_D^1 через вершины A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Для каждой из этих восьми прямых проведём содержащую эту прямую плоскость параллельно ребру AA_1, для каждой из полученных плоскостей исходную для неё прямую назовём осью. Все восемь плоскостей α_A^0, α_B^0, α_C^0, α_D^0, α_A^1, α_B^1, α_C^1, α_D^1 делятся на четыре пары; в каждой паре плоскости, как множества, совпадают; все плоскости из разных пар параллельны; соседние плоскости находятся на одном и том же расстоянии друг от друга.

Каждую из построенных восьми плоскостей начнём поворачивать вокруг её собственной оси; поворачивать их будем на один и тот же угол, в направлении обхода A_1ABB_1. Отметим, что при любом таком повороте восемь плоскостей будут параллельны, для любых соседей (l_X^0, l_Y^0) в силу симметрии расстояние между α_X^0 и α_Y^0 равно расстоянию между α_X^1 и α_Y^1 . Более того, если угол поворота меньше 90^o, это расстояние не зависит от выбора соседей. Таким образом, при любом таком повороте у нас имеются 8 параллельных друг другу плоскостей, каждая из которых проходит через свою вершину, среди плоскостей α_A^0, α_B^0, α_D^0, α_C^0 расстояния между соседними равны, и равны расстояниям между соседними среди плоскостей α_A^1, α_B^1, α_D^1, α_C^1. Но тогда осталось найти поворот, при котором эти плоскости идут друг за другом в следующем порядке: α_A^0, α_A^1, α_B^0, α_B^1, α_D^0, α_D^1, α_C^0, α_C^1; причём расстояние между плоскостями α_A^0 и α_A^1, и плоскостями α_A^1 и α_B^0 одно и тоже.

Рассмотрим любых соседей (l_X^0, l_Y^0). Обозначим через α_{XY}^{01} вспомогательную плоскость, содержащую прямые l_X^0, l_Y^1; легко видеть, что угол с этой плоскостью у плоскостей α_X^0, α_Y^1 одинаков. Более того, поскольку расстояние между соседними прямыми одно и тоже, то и этот угол не зависит от выбора пары соседних прямых, обозначим его через φ. Заметим, что при повороте на этот угол плоскости α_X^1, α_Y^0 совпадут с α_{XY}^{01}. Тогда при повороте на положительный угол, не превосходящий φ, плоскости будут находиться в указанном выше порядке.

Поскольку при нулевом повороте совпадали плоскости α_A^0 и α_A^1, а также плоскости α_B^0 и α_B^1, а при повороте на угол φ совпали плоскости α_A^1 и α_B^0, то при некотором повороте, на угол меньший, чем φ, расстояние между плоскостями α_B^0 и α_B^1 будет равно расстоянию между плоскостями α_A^1 и α_B^0. Данный угол — искомый. Поворот на него построенных ранее 8 плоскостей вокруг своих осей даст требуемое их расположение.

Ответ: Можно.