XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

2011 — 2012 уч.г.

Условия задач

Составители: Шевалдин В.Т., Нохрин С.Э., Хлопин Д.В., Альперин М.И.

Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии Наук.
Екатеринбург, 2012

XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011 — 2012 учебный год

5 — 6 класс

(**5—6.1**) Ромео и Джульетта назначили свидание на 10 часов утра. Ромео думает, что его часы спешат на 25 минут, хотя в действительности они отстают на 10 минут. А Джульетта думает, что её часы отстают на 10 минут, хотя в действительности они спешат на 5 минут. Кто из них пришёл на свидание первым и сколько минут ждал, если каждый из влюблённых, полагаясь на свои часы, пришёл на встречу на 5 минут раньше назначенного срока? Ответ обосновать.

(**5—6.2**) У Иванушки было вначале 6 стрел. Выпущенные стрелы Иванушке не возвращались, но за каждое попадание в цель он получал ещё по 3 стрелы. Всего он выстрелил 21 раз, после чего стрелы закончились. Сколько раз попал Иванушка? Ответ обосновать.

(**5—6.3**) а) Буратино написал 25 чисел. Оказалось, что какие бы три из них не выбрать, среди оставшихся найдётся такое четвёртое число, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Обязательно ли, что сумма всех 25 чисел, написанных Буратино, положительна? Ответ обосновать.

б) Мальвина тоже написала 25 чисел. Оказалось, что сумма любых четырёх из них положительна. Обязательно ли, что сумма всех 25 чисел, написанных Мальвиной, также положительна? Ответ обосновать.

(**5—6.4**) Гарри Поттеру на день рождения подарили большой торт в форме куба. Гарри Поттер желает разрезать его тремя прямолинейными разрезами огромным ножом на n частей, не обязательно равных. Сможет ли он это сделать, если а) $n = 7$; б) $n = 8$? Ответ обосновать.

(**5—6.5**) Из одного пакета сухого корма работник зоопарка может приготовить или 3 порции еды для лисы, или 2 порции еды для волка. Из одинакового числа выданных пакетов один работник приготовил 57 порций еды, а второй — 83 порции. По сколько пакетов корма выдали работникам? Ответ обосновать.

(**5—6.6**) В известной сказке старик на дорогу от землянки к морю, разговор с золотой рыбкой и дорогу обратно к землянке (старик ходил пешком) тратил ровно 1 час. Старуха, став боярыней, снова отправила его на разговор с рыбкой, но теперь уже в карете туда и обратно. Старик обернулся за 20 минут. Став царицей, старуха опять отправила его к морю в карете, но возвращаться старику в землянку пришлось уже пешком. Через сколько минут он вернулся, если во всех трёх случаях беседы старика с рыбкой занимали

а) пренебрежимо малое время;

б) одинаковое (но неизвестное нам) время?

XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011 — 2012 учебный год

7 класс

(**7.1**) В переплётной мастерской было 92 листа белой и 135 листов цветной бумаги. На переплёт каждой книги уходит 1 лист белой и 1 лист цветной бумаги. После переплёта нескольких книг белой бумаги осталось в 2 раза меньше, чем цветной. Сколько всего книг было переплетено? Ответ обосновать.

(**7.2**) У Русалочки есть волшебный фонарь в форме куба, внутри которого горит неугасимый огонь, а свет выходит из небольших круглых отверстий. Себастьян, увидев фонарь, отметил, что какой бы гранью его не поворачивай и с какой бы стороны (слева, справа, сверху или снизу) на эту грань не смотри, узор из отверстий на ней получается один и тот же. Однажды Русалочка и Себастьян подсчитали общее количество отверстий. У Русалочки получилось 88, а у Себастьяна — 86. Никому из нас неизвестно расположение отверстий; они могут быть и на гранях, и на рёбрах и даже в вершинах куба. Но можем ли мы утверждать, что а) Русалочка, б) Себастьян, в) оба героя мультсериала ошиблись при подсчёте? Ответ обосновать.

(**7.3**) Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части (все разрезы должны идти по линиям сетки) так, чтобы из получившихся четырёх кусков можно было сложить квадрат.

(**7.4**) Пусть x, y и z — целые числа. Представьте числа
а) $(x^2+1)(y^2+1)$;
б) $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)$
в виде суммы квадратов двух целых чисел.

(**7.5**) На двух противоположных сторонах квадрата отметили несколько точек. Между всеми возможными парами отмеченных точек провели отрезки. Могло ли внутри квадрата оказаться ровно семь точек пересечения этих отрезков? Ответ обосновать.

(**7.6**) В прямоугольную таблицу, содержащую m строк и n столбцов, вписаны все натуральные числа от 1 до mn (по одному в каждую клетку) следующим образом: в первую строку слева направо $1, 2, \ldots, n$, во вторую — числа $n+1, n+2, \ldots, 2n, \ldots$, в последнюю — числа $(m-1)n+1, (m-1)n+2, \ldots, mn$. Известно, что число 20 находится в третьей строке, число 41 — в пятой, а число 103 — в последней. Найдите все возможные значения m и n. Ответ обосновать.

XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011 — 2012 учебный год

8 класс

(**8.1**) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) из точки C проведена биссектриса CK. Может ли длина биссектрисы CK равняться удвоенной длине отрезка KB? Ответ обосновать.

(**8.2**) Пусть $|x| < 1,\ |y| < 1$. Докажите неравенство

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1.$$

(**8.3**) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ величины всех внутренних углов равны $120°$. Докажите, что $AB - DE = FE - BC = DC - FA$.

(**8.4**) К празднику все комнаты особняка были украшены цветами: розами, гвоздиками и хризантемами. Цветы были в каждой комнате, причём розы были ровно в 30 комнатах, гвоздики — ровно в 20, а хризантемы — ровно в 10. При этом ровно в двух комнатах стояли одновременно и хризантемы, и гвоздики, ровно в трёх комнатах — и хризантемы, и розы, ровно в четырёх комнатах — и гвоздики, и розы. Могло ли быть в особняке а) в точности 53 комнаты; б) в точности 54 комнаты? Ответ обосновать.

(**8.5**) На математической олимпиаде было предложено 5 задач. Среди участников олимпиады нет таких, которые решили одни и те же задачи. Тем не менее, если отбросить любую из пяти задач, то, выбрав любого участника, можно найти ещё одного участника, решившего тот же набор задач (из оставшихся 4-х), что и он. Сколько человек участвовало в олимпиаде? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

(**8.6**) Некоторое натуральное число n поделили с остатком на все натуральные числа, меньшие n. Оказалось, что сумма всех <u>различных</u> остатков (т.е. каждый возникающий остаток учитывается в сумме ровно один раз) в точности равна числу n. Какие значения может принимать число n? Ответ обосновать.

XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011 — 2012 учебный год

9 класс

(**9.1**) В 2012 году Вовочке исполнится столько лет, какова сумма цифр года его рождения. Определите, в каком году родился Вовочка. Ответ обоснуйте.

(**9.2**) В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

(**9.3**) Трус, Балбес и Бывалый поиграли в снежки. Точнее, сначала Балбес бросил один снежок, а затем, в ответ на каждый попавший в него снежок, Трус бросал 5 снежков, Балбес — 4, а Бывалый — целых 6. Когда 13 снежков пролетело мимо цели, игра закончилась. Найдите, сколько снежков попало в каждого из них, если нельзя попасть снежком в себя самого и невозможно попасть одним снежком сразу в двух других человек.

(**9.4**) Гидрометеоцентр сделал 16 замеров температур воздуха в апреле. Оказалось, что 1) сумма температур всех замеров равна $+0,5^\circ$, 2) самая низкая из этих температур составляет целое число градусов, 3) суммы температур любых 15 замеров превосходят нулевую отметку. Какое может быть минимальное значение самой низкой из замеренных температур? Ответ обосновать.

(**9.5**) Пусть x, y — произвольные положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+2}+\frac{y+1}{x+2}\leqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

(**9.6**) Правильный восьмиугольник двумя прямыми разбит на 4 части равной площади. Найдите все возможные значения угла между этими прямыми. Ответ обосновать.

XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011 — 2012 учебный год

10 класс

(**10.1**) Известно, что $\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = m, \quad \dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = n, \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad m, n > 0.$ Найдите $\cos(\alpha - \beta)$.

(**10.2**) Найдите все пары действительных чисел $(p,\, q)$ $(p \neq g)$ такие, что четыре числа, являющиеся корнями уравнений $x^2 - px - 1 = 0$ и $x^2 - qx - 1 = 0$, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию.

(**10.3**) Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1 см, 3 см и 15 см, а от другой (в том же порядке) 4 см, 5 см и 11 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

(**10.4**) Пусть функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям
(1) $f(10 + x) = f(10 - x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$;
(2) $f(20 + x) = -f(20 - x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$.
Докажите, что функция f нечётна и периодична.

(**10.5**) Какое наибольшее количество шахматных коней можно поставить на пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы каждый конь был под боем не более одного другого коня? Ответ обосновать.

(**10.6**) В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90^\circ)$ проведены все четыре трисектрисы острых углов AA_1, AA_2, BB_1 и BB_2. (Трисектрисами угла называют лучи, выходящие из его вершины и делящие угол на три равные части.) Ближайшие к гипотенузе трисектрисы AA_2 и BB_2 пересекаются в точке P. Докажите, что треугольник A_1B_1P — равносторонний.

XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2011 — 2012 учебный год

11 класс

(**11.1**) Точка $P(a,\, b)$ расположена на плоскости в первой координатной четверти. Рассмотрим круг радиуса большего, чем $\sqrt{a^2+b^2}$, с центром в точке P. Обозначим через S_i площадь части этого круга, лежащей в i-ом координатной четверти ($i = 1, 2, 3, 4$). Найдите $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

(**11.2**) В комнате размером $3 \times 3 \times 3$ (м^3) находится кузнечик, который совершает прыжки длиной ровно $\sqrt{19}$ (м). (Кузнечик не может висеть в воздухе, поэтому конечная точка любого прыжка расположена на полу, на потолке, или на одной из стен комнаты.) За какое наименьшее число прыжков он может допрыгать из нижнего угла комнаты в самый дальний верхний? Ответ обосновать.

(**11.3**) Пусть α, β и γ — углы некоторого треугольника. Докажите, что для всех действительных чисел x, y и z справедливо неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos\alpha - 2yz\cos\beta - 2xz\cos\gamma \geqslant 0.$$

(**11.4**) На параболе $y = x^2$ выбраны любые четыре точки так, что сумма их абсцисс равна нулю. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

(**11.5**) Рабочие должны выложить пол прямоугольной комнаты плитками размера 2×2 и 1×4 (размеры пола таковы, что он может быть полностью покрыт некоторым набором плиток указанных размеров). Заказчиком было подготовлено нужное количество плиток каждого размера. Однако при переносе их к месту работы три плитки размером 2×2 разбились. Их решили заменить тремя плитками размера 1×4. Докажите, что теперь выложить поверхность этого пола имеющимися плитками не удастся.

(**11.6**) Докажите, что если $|ax^2+bx+c| \leqslant \dfrac{1}{2}$ при всех $|x| \leqslant 1$, то $|ax^2+bx+c| \leqslant x^2 - \dfrac{1}{2}$ при всех $|x| \geqslant 1$.