XI ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

2011 — 2012 уч.г.

Решения задач

Составители: Шевалдин В.Т., Нохрин С.Э., Хлопин Д.В., Альперин М.И.

Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии Наук.
Екатеринбург, 2012

5 — 6 КЛАСС

(**5—6.1**) *Ромео и Джульетта назначили свидание на 10 часов утра. Ромео думает, что его часы спешат на 25 минут, хотя в действительности они отстают на 10 минут. А Джульетта думает, что её часы отстают на 10 минут, хотя в действительности они спешат на 5 минут. Кто из них пришёл на свидание первым и сколько минут ждал, если каждый из влюблённых, полагаясь на свои часы, пришёл на встречу на 5 минут раньше назначенного срока? Ответ обосновать.*

Решение. Ромео подошёл (как ему казалось) в 9 часов 55 минут, и его часы показывали в тот момент время на 25 минут больше, т.е. 20 минут одиннадцатого. Реальное же время было больше ещё на 10 минут, т.е. объективно Ромео пришёл в 10 часов 30 минут. Аналогично, Джульетта пришла (по своим часам) без 15 минут 10, а реальное время было 9 часов 40 минут. Таким образом, Джульетта пришла раньше на 50 минут.

ОТВЕТ: Джульетта пришла раньше на 50 минут.

(**5—6.2**) *У Иванушки было вначале 6 стрел. Выпущенные стрелы Иванушке не возвращались, но за каждое попадание в цель он получал ещё по 3 стрелы. Всего он выстрелил 21 раз, после чего стрелы закончились. Сколько раз попал Иванушка? Ответ обосновать.*

Решение. Первый способ. Так как Иванушка выпустил в сумме 21 стрелу, то он получил дополнительно $21 - 6 = 15$ стрел, т.е. попал $15 : 3 = 5$ раз.

Второй способ. Пусть Иванушка попал x раз. Тогда он получил $3x$ дополнительных стрел. Имеем уравнение $3x + 6 = 21$, решая которое находим $x = 5$.

ОТВЕТ: Иванушка попал 5 раз.

(**5—6.3**) *а) Буратино написал 25 чисел. Оказалось, что какие бы три из них не выбрать, среди оставшихся найдётся такое четвёртое число, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Обязательно ли, что сумма всех 25 чисел, написанных Буратино, положительна? Ответ обосновать.*

б) Мальвина тоже написала 25 чисел. Оказалось, что сумма любых четырёх из них положительна. Обязательно ли, что сумма всех 25 чисел, написанных Мальвиной, также положительна? Ответ обосновать.

Решение. а) Предположим, что Буратино написал такие числа: $-1, -2, -3, \ldots, -24$ и число 100. Тогда сумма 100 и любых трёх других чисел положительна, так что условие задачи выполнено, в то время, как сумма всех 25 чисел отрицательна.

б) Рассмотрим четыре наименьших числа, написанных Мальвиной. Их сумма положительна, значит, среди них есть положительное, $a > 0$. Тогда все остальные числа также положительны (они не меньше, чем a). Но тогда сумма всех чисел больше, чем сумма четырёх наименьших, т.е. тоже положительна.

ОТВЕТ: а) Нет. б) Да.

(**5—6.4**) *Гарри Поттеру на день рождения подарили большой торт в форме куба. Гарри Поттер желает разрезать его тремя прямолинейными разрезами огромным ножом на n частей, не обязательно равных. Сможет ли он это сделать, если а) $n = 7$; б) $n = 8$? Ответ обосновать.*

Решение. а) Гарри достаточно провести три вертикальных разреза так, чтобы на верхней стороне торта они образовали три попарно пересекающихся отрезка, не проходящие через одну точку.

б) Только вертикальными разрезами Гарри обойтись не удастся, однако можно провести один разрез горизонтальной плоскостью и два вертикальными плоскостями. При этом если все эти плоскости проходят через одну точку, лежащую внутри торта, торт разделится на 8 частей ровно.

ОТВЕТ: Сможет в обоих случаях.

(**5—6.5**) *Из одного пакета сухого корма работник зоопарка может приготовить или 3 порции еды для лисы, или 2 порции еды для волка. Из одинакового числа выданных пакетов один работник приготовил 57 порций еды, а второй — 83 порции. По сколько пакетов корма выдали работникам? Ответ обосновать.*

Решение. Если работнику выдали 29 пакетов или больше, то он из них приготовит не менее 58 порций — противоречие. Если выдали 27 или меньше, то получится не больше 81 порции — снова противоречие. Остаётся число 28. Оно подходит: первый служитель из одного пакета сделал 3 порции, а из остальных 27-и — по две; второй из 27 пакетов сделал по 3 порции, и из одного — ещё 2.

ОТВЕТ: по 28 пакетов.

(**5—6.6**) *В известной сказке старик на дорогу от землянки к морю, разговор с золотой рыбкой и дорогу обратно к землянке (старик ходил пешком) тратил ровно 1 час. Старуха, став боярыней, снова отправила его на разговор с рыбкой, но теперь уже в карете туда и обратно. Старик обернулся за 20 минут. Став царицей, старуха опять отправила его к морю в карете, но возвращаться старику в землянку пришлось уже пешком. Через сколько минут он вернулся, если во всех трёх случаях беседы старика с рыбкой занимали*

а) пренебрежимо малое время;

б) одинаковое (но неизвестное нам) время?

Решение. Так как при поездке на карете туда и обратно старик экономил $60-20=40$ минут, то экономия времени при поездке в одну сторону составляет $40:2=20$ минут, и она не зависит от того, сколько времени длилось движение, и сколько минут ушло на беседу с рыбкой. Значит, при последней поездке старик потратит времени на 20 минут меньше, чем при ходьбе пешком (или на 20 минут больше, чем при езде на карете туда — обратно). Итак, старик вернётся через $60-20=40$ минут.

ОТВЕТ: Через 40 минут, независимо от того, сколько времени длился разговор с рыбкой.

7 КЛАСС

(**7.1**) *В переплётной мастерской было 92 листа белой и 135 листов цветной бумаги. На переплёт каждой книги уходит 1 лист белой и 1 лист цветной бумаги. После переплёта нескольких книг белой бумаги осталось в 2 раза меньше, чем цветной. Сколько всего книг было переплетено? Ответ обосновать.*

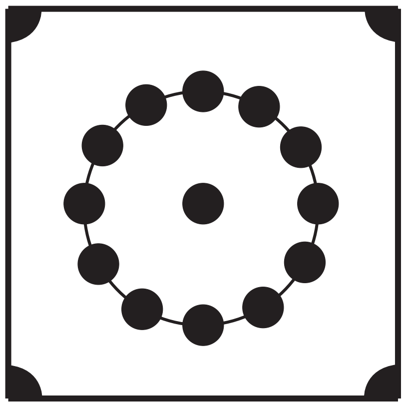
Решение. Способ первый. Так как при переплёте каждой книги тратится поровну белой и цветной бумаги, то неизменной остаётся разность количества листов белой и цветной бумаги (это инвариант процесса), которая равна 43. Так как в итоге белой бумаги осталось вдвое меньше, чем цветной, то листов белой бумаги осталось столько же, какова найденная разность, т.е. 43. Значит, потрачено $92 - 43 = 49$ листов белой бумаги; столько же книг переплетено.

Способ второй. Пусть переплетено x книг. Тогда цветной бумаги осталось $135 - x$ листов, а белой $92 - x$ листов. Из уравнения $135 - x = 2 \cdot (92 - x)$ находим, что $x = 49$.

ОТВЕТ: 49 книг.

(**7.2**) *У Русалочки есть волшебный фонарь в форме куба, внутри которого горит неугасимый огонь, а свет выходит из небольших круглых отверстий. Себастьян, увидев фонарь, отметил, что какой бы гранью его не поворачивай и с какой бы стороны (слева, справа, сверху или снизу) на эту грань не смотри, узор из отверстий на ней получается один и тот же. Однажды Русалочка и Себастьян подсчитали общее количество отверстий. У Русалочки получилось 88, а у Себастьяна — 86. Никому из нас неизвестно расположение отверстий; они могут быть и на гранях, и на рёбрах и даже в вершинах куба. Но можем ли мы утверждать, что а) Русалочка, б) Себастьян, в) оба героя мультсериала ошиблись при подсчёте? Ответ обосновать.*

Решение. Любую грань куба можно совместить с любой. Пусть M — точка на грани, но не на ребре и не вершина, и пусть k — число образов точки M в этой грани, тогда общее число образов точки M равно $6k$. Аналогично, если точка H лежит на ребре и число образов точки H на этом ребре l, то общее число образов точки равно $12l$. Поэтому общее число точек, лежащих на рёбрах и гранях, делится на 6. Если точка лежит в вершине, то образов у нее 8. Поэтому либо число n, либо число $n - 8$ должны делиться на 6. Заметим, что ни 88, ни $88 - 8 = 80$ не делятся на 3, поэтому Русалочка правой оказаться не могла. Так как $86 - 8$ делится на 6 (в частном получается 13), проведённые рассуждения не противоречат утверждению Себастьяна. Однако из этого ещё не следует, что Себастьян может быть правым, следует только то, что, если он прав, то во всех вершинах куба есть отверстия. Чтобы убедиться, что Себастьян может быть правым, проще всего построить пример такого фонаря — куба. Например, каждая его грань может выглядеть так, как показано на рисунке: 1 отверстие в центре грани и ещё 12 отверстий располагаются на окружности с центром в той же грани на равном расстоянии друг от друга, как числа на циферблате часов.



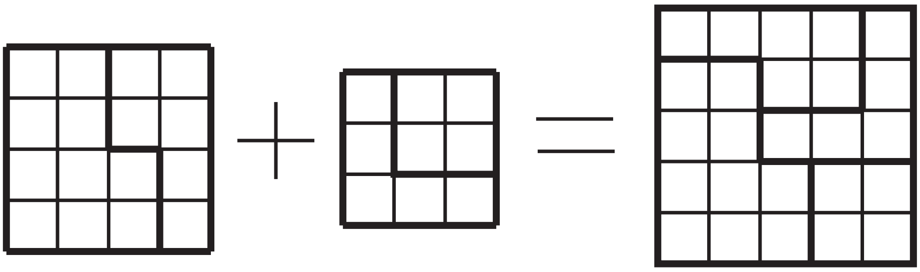
К решению задачи 7.2.

Замечание. Можно доказать, что количество отверстий на каждой грани должно иметь вид $4k$ или $4k+1$, где k — целое не отрицательное число (в последнем случае одно из отверстий обязано располагаться в центре грани). У куба 6 граней с одинаковым количеством отверстий, 12 ребер с одинаковым количеством отверстий, и 8 вершин. Следовательно, общее количество отверстий должно иметь вид $12k$, $12k+6$, $12k+8$ или $12k+14$, $k \in \mathbf{Z} \cup \{0\}$. При любом числе указанного вида соответствующий фонарь строится.

ОТВЕТ: Можно утверждать, что Русалочка ошиблась. Утверждать, что ошибся Себастьян (или, тем более, ошиблись оба) нельзя.

(**7.3**) *Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части (все разрезы должны идти по линиям сетки) так, чтобы из получившихся четырёх кусков можно было сложить квадрат.*

Решение. Решение приведено на рисунке.



К решению задачи 7.3.

(**7.4**) *Пусть x, y и z — целые числа. Представьте числа*

а) $(x^2+1)(y^2+1)$*;*

б) $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)$

в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Решение. Заметим, что $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2+a^2d^2+ +b^2c^2+b^2d^2 = (ac)^2+(bd)^2+2acbd-2acbd+(ad)^2+(bc)^2 = = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

а) Используем эту формулу, положив $a = x$, $c = y$, $b = d = 1$. Получим $(x^2+1)(y^2+1) = (xy+1)^2+(x-y)^2$.

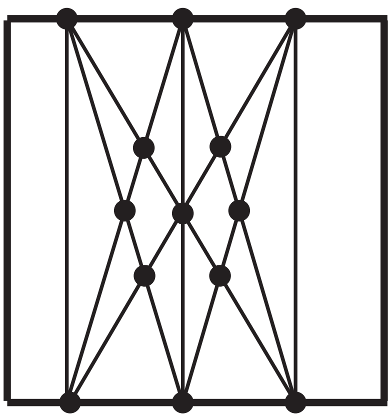
б) $(x^2+1)(y^2+1) = (xy+1)^2+(x-y)^2$ по пункту а), поэтому $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = \Big((xy+1)^2+(x-y)^2\Big)(z^2+1)$.

Вновь используем формулу: $\Big((xy+1)^2+(x-y)^2\Big)(z^2+1) =$

$= \Big((xy+1)z+(x-y)\cdot 1\Big)^2+\Big((xy+1)\cdot 1-z(x-y)\Big)^2 =$

$= (xyz+z+x-y)^2+(xy-xz+zy+1)^2$.

Целость числа в каждой из скобок сомнений не вызывает.



К решению задачи 7.5.

ОТВЕТ:

а) $(x^2+1)(y^2+1) = (xy+1)^2+(x-y)^2$,

б) $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = (xyz+z+x-y)^2+(xy-xz+zy+1)^2$.

(**7.5**) *На двух противоположных сторонах квадрата отметили несколько точек. Между всеми возможными парами отмеченных точек провели отрезки. Могло ли внутри квадрата оказаться ровно семь точек пересечения этих отрезков? Ответ обосновать.*

Решение. Достаточно отметить по три точки на стороне так, как указано на рисунке.

ОТВЕТ: Можно.

(**7.6**) *В прямоугольную таблицу, содержащую m строк и n столбцов, вписаны все натуральные числа от* 1 *до* mn *(по одному в каждую клетку) следующим образом: в первую строку слева направо* $1, 2, \ldots, n$, *во вторую — числа* $n+1, n+2, \ldots, 2n, \ldots$, *в последнюю — числа* $(m-1)n+1, (m-1)n+2, \ldots, mn$. *Известно, что число* 20 *находится в третьей строке, число* 41 *— в пятой, а число* 103 *— в последней. Найдите все возможные значения* m *и* n. *Ответ обосновать.*

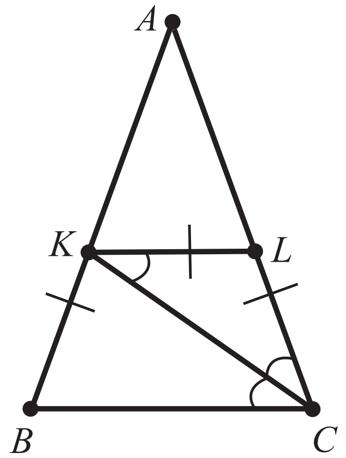
Решение. По условию для любого натурального $k \leqslant m$ в k-ой строке стоят числа от $(k-1)n+1$ до kn. Тогда по условию $2n+1 \leqslant 20 \leqslant 3n$ и $4n+1 \leqslant 41 \leqslant 5n$. Из левой части первого двойного неравенства следует, что $n \leqslant 9$, а из правой части второго — что $n \geqslant 9$ (учтено, что число n — натуральное). Значит, $n = 9$. Далее, последняя строка содержит числа от $(m-1)n+1$ до mn, т.е от $9m-8$ до $9m$. Из двойного неравенства $9m-8 \leqslant 103 \leqslant 9m$ и того факта, что $m \in \mathbf{N}$, находим, что $m = 12$.

ОТВЕТ: $m = 12,\ n = 9$.

8 КЛАСС

(**8.1**) *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) из точки C проведена биссектриса CK. Может ли длина биссектрисы CK равняться удвоенной длине отрезка KB? Ответ обосновать.*

Решение. Проведём через точку K прямую, параллельную прямой BC, и пусть она пересекает сторону AB в точке L. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $\angle ABC = \angle ACB$, а тогда трапеция $BKLC$ тоже равнобедренная, поэтому $BK = LC$. Углы $\angle BCK$ и $\angle CKL$ равны, как внутренние накрест лежащие при параллельных KL и BC и секущей KC. Так как CK — биссектриса угла C, $\angle BCK = \angle KCL$. Значит $\angle KCL = \angle CKL$, треугольник CKL — равнобедренный, и $KL = LC = BK$. В силу неравенства треугольника $KC < KL + LC = 2BK$, т.е. KC всегда меньше удвоенной длины KB.



к решению задачи 8.1.

ОТВЕТ: Не может.

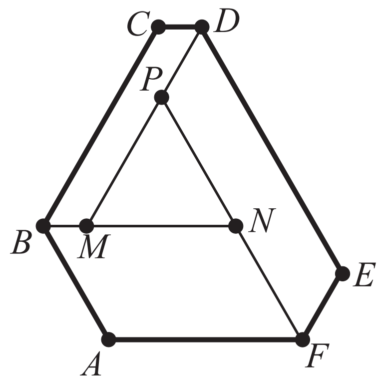
(**8.2**) *Пусть $|x| < 1,\ |y| < 1$. Докажите неравенство*

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1.$$

Решение. Из условия задачи вытекает, что $1-xy>0$, поэтому неравенство равносильно следующему: $\dfrac{|x-y|}{1-xy} < 1$. Умножив обе части на положительное число $1 - xy$, получим равносильное неравенство $|x-y| < 1-xy$. Пусть $x \geqslant y$ (второй случай аналогичен). Тогда требуется доказать, что $x - y < 1 - xy \Leftrightarrow x(1 + y) - (1 + y) < 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + y) > 0$, а последнее неравенство очевидно при данных ограничениях на x и y.

(**8.3**) *В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ величины всех внутренних углов равны $120°$. Докажите, что $AB - DE = FE - BC = DC - FA$.*

Решение. Проведём через точки B и D прямые, параллельные соответственно сторонам AF и BC; точку их пересечения обозначим буквой M. Так как все внутренние углы шестиугольника равны $120°$, точка M будет лежать внутри шестиугольника. Аналогично проведём прямую $PF \parallel DE$ и обозначим буквами N и P точки пересечения этой прямой с прямыми BM и DM соответственно и убедимся, что обе эти точки лежат внутри $ABCDEF$. Без ограничения общности положим, что $AF \geqslant CD$ (см. рисунок). Четырёхугольники $BCDM$ и $ABNF$ — параллелограммы (их противоположные стороны параллельны), поэтому $BN = AF \geqslant CD = BM$, т.е. точка M лежит на отрезке BN. Прямые FN и DM составляют с прямой MN углы в $60°$ и пересекаются в точке P, поэтому треугольник MNP равносторонний и $MN = NP = MP$. Но $MN = BN - BM = AF - CD$, $NP = FP - FN = DE - AB$, а $MP = DM - DP = BC - FE$, что завершает доказательство.



к решению задачи 8.3.

(**8.4**) *К празднику все комнаты особняка были украшены цветами: розами, гвоздиками и хризантемами. Цветы были в каждой комнате, причём розы были ровно в* 30 *комнатах, гвоздики — ровно в* 20, *а хризантемы — ровно в* 10. *При этом ровно в двух комнатах стояли одновременно и хризантемы, и гвоздики, ровно в трёх комнатах — и хризантемы, и розы, ровно в четырёх комнатах — и гвоздики, и розы. Могло ли быть в особняке а) в точности* 53 *комнаты; б) в точности* 54 *комнаты? Ответ обосновать.*

Решение. Пусть в a комнатах особняка стояли все три типа цветов. Тогда комнат, в которых были розы и гвоздики, но не было хризантем ровно $4-a$, комнат, содержащих розы и хризантемы, но не гвоздики ровно $3-a$ и комнат, содержащих только гвоздики и хризантемы ровно $2-a$. Так как все эти числа неотрицательные, то $a \leqslant 2$. Далее, комнат, в которых есть только розы ровно $30-a-(4-a)-(3-a)=a+23$. Аналогично вычисляется количество комнат, содержащих только гвоздики и только хризантемы; получаются числа $a+14$ и $a+5$ соответственно. Тогда общее число комнат особняка равно

$$a+(4-a)+(3-a)+(2-a)+(a+23)+(a+14)+(a+5)=a+51.$$

Это число не может равняться 54, так как $a \leqslant 2$. Значение 53 достигается при $a=2$; из решения видно, как размещены цветы по комнатам.

ОТВЕТ: а) Да, могло. б) Нет, это невозможно.

(**8.5**) *На математической олимпиаде было предложено* 5 *задач. Среди участников олимпиады нет таких, которые решили одни и те же задачи. Тем не менее, если отбросить любую из пяти задач, то, выбрав любого участника, можно найти ещё одного участника, решившего тот же набор задач (из оставшихся 4-х), что и он. Сколько человек участвовало в олимпиаде? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Поставим в соответствие каждому участнику олимпиады строку из пяти символов по следующему правилу: если участник решил задачу под номером i, то на i-м месте в его строке стоит единица, в противном случае — ноль. Получим некоторый набор последовательностей. Он обладает таким свойством: взяв любую последовательность набора и заменив в ней один (любой) символ на противоположный вновь получим последовательность из набора. Теперь вопрос задачи можно переформулировать так: сколько последовательностей содержится в данном наборе? Покажем, что все возможные последовательности из нулей и единиц длины 5 в наборе присутствуют. В самом деле, возьмём любую последовательность набора, без ограничения общности положим, что она состоит из одних нулей. Тогда по условию в наборе есть все последовательности, содержащие ровно одну единицу. Теперь рассмотрим некоторую последовательность, содержащую ровно две единицы. Заменим одну из единиц этой последовательности нулём — получим последовательность из набора. Значит, рассмотренная последовательность с двумя единицами (а, значит, и все такие последовательности) также входит в набор. Рассмотрим некоторую последовательность, содержащую ровно три единицы. Аналогичные рассуждения показывают, что она тоже присутствует в наборе. Продолжая рассуждать таким образом, приходим к выводу, что все последовательности длины пять в набор входят.

Подсчитаем число таких последовательностей. На каждом из пяти мест может стоять любой из двух символов, поэтому всего вариантов последовательностей $2^5=32$. Так как каждая последовательность встречается один раз (нет двух участников олимпиады, решивших один и тот же набор задач), то и участников олимпиады тоже 32.

ОТВЕТ: 32 человека.

(**8.6**) *Некоторое натуральное число $n > 1$ поделили с остатком на все натуральные числа, меньшие n. Оказалось, что сумма всех различных остатков (т.е. каждый возникающий остаток учитывается в сумме ровно один раз) в точности равна числу n. Какие значения может принимать число n?*

Решение. Заметим, что при делении числа n на число $n-1$ в остатке получается 1, при делении его на число $n-2$ в остатке получается 2, и вообще, если $k < \frac{n}{2}$, то при делении n на число $n-k$ в остатке получается k. Таким образом, среди различных остатков всегда присутствуют числа $1, 2 \ldots, k$, где k — наибольшее целое число, меньшее $\frac{n}{2}$. Других ненулевых остатков получится не может, так как при делении числа n на число вида $A-k$, где $k \geqslant \frac{n}{2}$, остаток получится меньше, чем $n-k$, и, значит, меньше, чем $\frac{n}{2}$.

Подсчитаем сумму $1+2+\ldots+k$. Рассмотрим квадратный лист клетчатой бумаги со стороной $k+1$ клеток. Закрасим во втором столбце самую нижнюю клетку, в третьем — две нижних, и т. д. до последнего столбца, в котором закрасим нижние k клеток. Общее число закрашенных клеток как раз и равно $1+2+\ldots+k$. С другой стороны, закрашенные клетки — это все клетки, лежащие ниже диагонали квадрата, выходящей из левого нижнего угла. Ясно, что их столько же, сколько клеток лежащих выше указанной диагонали, а всего клеток, не лежащих на диагонали ровно $(k+1)^2-(k+1)$ (из общего числа клеток квадрата отнимается число клеток диагонали). Значит, закрашенных клеток ровно $\frac{(k+1)^2-(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$. Итак, $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Рассмотрим два случая: 1) Пусть n — нечётное число, равное $2k+1$ ($k \in \mathbf{N}$). Тогда рассмотренная сумма остатков равна $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, и мы имеем уравнение $\frac{k(k+1)}{2} = 2k+1$. Решим его: $\frac{k(k+1)}{2} = 2k+1 \Leftrightarrow k^2+k = 4k+2 \Leftrightarrow k^2-3k-2=0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. Но k обязано быть целым числом, поэтому оба корня посторонние. Значит, нечётных чисел n, удовлетворяющих условию задачи нет.

2) Пусть теперь n чётно, т.е. $n = 2k$ для некоторого натурального k. Тогда сумма различных остатков равна $1+2+\ldots+(k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$, получается уравнение $\frac{(k-1)k}{2} = 2k$, решая которое получаем $k=5$. Значит, число $n = 2k = 10$ — единственное решение задачи в этом случае.

ОТВЕТ: $n = 10$.

9 КЛАСС

(**9.1**) *В 2012 году Вовочке исполнится столько лет, какова сумма цифр года его рождения. Определите, в каком году родился Вовочка. Ответ обоснуйте.*

Решение. Вовочке не может в этом году исполниться более $1 + 9 + 9 + 9 = 28$ лет, так как число 1999 имеет максимальную сумму цифр среди всех чисел, не превосходящих 2012. Значит, Вовочка родился не раньше $2012 - 28 = 1984$ года. Возможно два случая:

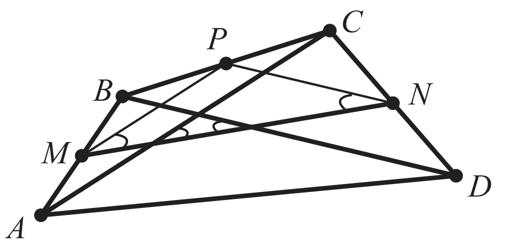
1) Вовочка родился в XX веке, в году $\overline{19xy}$. Тогда в 2012 году Вовочке исполняется $2012 - 1900 - 10x - y$ лет. Имеем уравнение $112 - 10x - y = 1 + 9 + x + y \Leftrightarrow 102 = 11x + 2y$. Отсюда x — чётное число. Так как $x \in \{8, 9\}$ (исходя из тех значений, которые может принимать год рождения Вовочки), то $x = 8$, а тогда $y = 7$. Год рождения Вовочки в этом случае 1987.

2) Вовочка родился в XXI веке, в году $\overline{20xy}$. Тогда в нынешнем году Вовочке стукнет $12 - 10x - y$ лет, что равно $x + y + 2$. Получаем $11x + 2y = 10$. Цифра x снова чётна, но на сей раз она лежит в наборе $\{0, 1\}$. Значит $x = 0$, а тогда $y = 5$, и год рождения Вовочки 2005.

ОТВЕТ: Либо в 2005 году, либо в 1987 году.

(**9.2**) *В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.*

Решение. Пусть диагонали BD и AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ образуют равные углы с прямой MN, где M и N — середины сторон AB и CD соответственно (см. рисунок). Обозначим середину стороны BC через P. Тогда MP — средняя линяя треугольника ABC, поэтому $MP \parallel AC$. Аналогично, $NP \parallel BD$ и тогда по условию задачи $\angle MNP = \angle NMP$. Это означает, что треугольник MNP — равнобедренный, $NP = MP$. Осталось заметить, что по свойству средней линии $AC = 2MP$ и $BD = 2NP$.



к решению задачи 9.2.

(**9.3**) *Трус, Балбес и Бывалый поиграли в снежки. Точнее, сначала Балбес бросил один снежок, а затем, в ответ на каждый попавший в него снежок, Трус бросал 5 снежков, Балбес — 4, а Бывалый — целых 6. Когда 13 снежков пролетело мимо цели, игра закончилась. Найдите, сколько снежков попало в каждого из них, если нельзя попасть снежком в себя самого и невозможно попасть одним снежком сразу в двух других человек.*

Решение. Пусть в Бывалого попало x снежков, в Труса y снежков и в Балбеса z снежков (числа x, y, z — целые, неотрицательные). Тогда общее число брошенных снежков равно $x+y+z+13$. С другой стороны, Бывалый бросил $6x$ снежков, Трус $5y$, а Балбес $4z+1$, всего было брошено $6x + 5y + 4z + 1$ снежков. Из уравнения $x + y + z + 13 = 6x + 5y + 4z + 1$ получаем, что $5x + 4y + 3z = 12$, откуда $x < 3$. Если $x = 2$, то $4y + 3z = 2$, что невозможно при целых неотрицательных значениях y и z. Если $x = 1$, то $4y + 3z = 7$ и несложно проверить, что пара $y = 1$, $z = 1$ — единственная, удовлетворяющая всем условиям. Наконец, пусть $x = 0$. Тогда $4y + 3z = 12$. Из этого уравнения следует, что z кратно 4, поэтому либо $z = 4$ (и тогда $y = 0$), либо $z = 0$ (а $y = 3$). Заметим, однако, что из чисел x, y, z не более одного числа может равняться нулю: в этом случае все снежки (кроме, возможно, самого первого) бросал один и тот же человек, и так как в себя не бросаются, то в него мог попасть только самый первый снежок. В этом случае общее число снежков будет меньше 13. Поэтому решения $x = 0, y = 0, z = 4$ и $x = 0, y = 3, z = 0$ на самом деле решениями не являются. Случай $x = y = z = 1$ возможен. Например, Балбес попал в Труса, Трус бросил 6 снежков, попал по разу в Бывалого и в Балбеса, а 4 раза промахнулся. После этого Балбес ответил ещё 4, а Бывалый 5-ю снежками, все мимо цели. Ровно 13 промахов на всех.

ОТВЕТ: В каждого участника попало по одному снежку.

(**9.4**) *Гидрометеоцентр сделал* 16 *замеров температур воздуха в апреле. Оказалось, что 1) сумма температур всех замеров равна* $+0,5^\circ$, *2) самая низкая из этих температур составляет целое число градусов, 3) суммы температур любых* 15 *замеров превосходят нулевую отметку. Какое может быть минимальное значение самой низкой из замеренных температур? Ответ обосновать.*

Решение. Способ первый. Пусть A — самая низкая измеренная температура, C — самая высокая, B — сумма температур остальных 14 замеров (все температуры в градусах по Цельсию). По условию $A+B > 0$, $A+B+C = 0,5$. Отсюда $C = 0,5-(A+B) < 0,5$. Так как B — это сумма 14-и чисел, каждое из которых не больше, чем C, то $B \leqslant 14C < 7$. Тогда $A > -B > -7$, и, будучи целым числом, $A \geqslant -6$. При этом случай $A = -6$ возможен. Действительно, в этом случае $B + C = 6,5$ и можно положить, например, что $B = 14C$. Тогда $C = \dfrac{6,5}{15}$, $B = \dfrac{91}{15}$ и это достигается, если температура, полученная в каждом из 14 промежуточных замеров, равна C.

Способ второй. Пусть $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{16}$ — результаты замеров, расположенные в порядке неубывания. Тогда по условию задачи $\alpha_1 \in \mathbf{Z}$, $\sum\limits_{i=1}^{16} \alpha_i = 0,5$ и $\sum\limits_{i=1}^{15} \alpha_i > 0$.

Вначале докажем, что $\alpha_{16} < 0,5$. От противного, пусть $\alpha_{16} \geqslant 0,5$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{15} \alpha_i = 0,5 - \alpha_{16} \leqslant 0$ — противоречие. Далее, $0,5 = \sum\limits_{i=1}^{16} \alpha_i < \alpha_1 + 15 \cdot 0,5 = \alpha_1 + 7,5$. Значит, $\alpha_1 > -7$. Поскольку $\alpha_1 \in \mathbf{Z}$, то $\alpha_1 \geqslant -6$.

Покажем, что температура $\alpha_1 = -6$ может быть достигнута. Положим $\alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{16} = \alpha$. В силу условия задачи $-6 + 15\alpha = 0,5$, т.е. $\alpha = \dfrac{13}{30}$. Осталось проверить ещё одно условие: $\sum\limits_{i=1}^{15} \alpha_i > 0$. Оно выполнено: $\sum\limits_{i=1}^{15} \alpha_i = -6 + 14 \cdot \dfrac{13}{30} = \dfrac{1}{15}$.

Ответ: -6°.

(**9.5**) *Пусть x, y — произвольные положительные числа. Докажите неравенство*

$$\frac{x+1}{y+2} + \frac{y+1}{x+2} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Решение. Способ первый. Проведём равносильные преобразования:
$\dfrac{x+1}{y+2} + \dfrac{y+1}{x+2} \leqslant \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{y+2} - \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{y}{x} - \dfrac{y+1}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{y-2x}{y(y+2)} \leqslant \dfrac{2y-x}{x(x+2)}$. Пусть $y = kx$ $(k > 0)$. Тогда неравенство принимает вид $\dfrac{k-2}{k(kx+2)} \leqslant \dfrac{2k-1}{x+2}$. Знаменатели

дробей в обеих частях положительны, поэтому неравенство можно почленно умножить на их произведение. Далее, проводя равносильные преобразования, получаем

$$\frac{k-2}{k(kx+2)} \leqslant \frac{2k-1}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)(k-2) \leqslant (2k^2-k)(kx+2)$$

$$x(k-2-k(2k^2-k)) \leqslant 2(2k^2-k)-2(k-2)$$
$$-x(2k^3-k^2-k+2) \leqslant 4(k^2-k+1)$$
$$-x((k+1)(2k^2-3k+2)) \leqslant 4(k^2-k+1).$$

Заметим, что оба квадратных (относительно k) трёхчлена, стоящие в этом неравенстве, имеют отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, т.е. положительны на всей числовой оси. Число $k+1$ тоже положительно ввиду положительности числа k. Но тогда в правой части последнего неравенства стоит положительная величина, а в левой — отрицательная. Неравенство доказано.

Способ второй. Проведём равносильные преобразования:

$$\frac{x+1}{y+2}+\frac{y+1}{x+2} \leqslant \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x}-\frac{x+1}{y+2}+\frac{x}{y}-\frac{y+1}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2-x^2+y-x+y}{x(y+2)}+\frac{x^2-y^2+x-y+x}{y(x+2)} \geqslant 0.$$

Поскольку $\dfrac{y}{x(y+2)} > 0$ и $\dfrac{x}{y(x+2)} > 0$, то достаточно доказать, что $\dfrac{y^2-x^2+y-x}{x(y+2)} + \dfrac{x^2-y^2+x-y}{y(x+2)} \geqslant 0$. Но

$$\frac{y^2-x^2+y-x}{x(y+2)}+\frac{x^2-y^2+x-y}{y(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(x+y+1)}{x(y+2)}+\frac{(x-y)(x+y+1)}{y(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{1}{x(y+2)}-\frac{1}{y(x+2)}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)(2y-2x)}{xy(x+2)(y+2)} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно.

Способ третий. Поскольку $\dfrac{x+1}{y+1}+\dfrac{y+1}{x+1} > \dfrac{x+1}{y+2}+\dfrac{y+1}{x+2}$ при x, $y>0$, то достаточно доказать неравенство

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant \frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}+\frac{y}{x}-\frac{y+1}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{y(y+1)}-\frac{x-y}{x(x+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x+y+1)}{x(x+1)y(y+1)} \geqslant 0,$$

которое очевидно.

(**9.6**) *Правильный восьмиугольник двумя прямыми разбит на* 4 *части равной площади. Найдите все возможные значения угла между этими прямыми. Ответ обосновать.*

Решение. Из условия задачи следует, что каждая из разбивающих прямых делит восьмиугольник на две равновеликие фигуры. Так как многоугольник имеет центр симметрии (пусть это точка O), то любая прямая, проходящая через этот центр, делит площадь многоугольника пополам. Покажем, что если прямая не проходит через центр симметрии, то она не может делить площадь восьмиугольника пополам. В самом деле, пусть прямая l не проходит через точку O. Проведём через O прямую m, параллельную l. Она делит площадь восьмиугольника на две равные части, поэтому в содержащей прямую m полуплоскости с границей l лежит половина восьмиугольника и ещё его часть (ненулевой площади), заключённая между прямыми l и m, т.е. с одной стороны от прямой l находится больше половины площади восьмиугольника.

Итак, обе разбивающие восьмиугольник прямые проходят через точку O. Заметим, что если провести через точку O пару перпендикулярных прямых, то восьмиугольник разобьётся на 4 фигуры, которые равны, поскольку при повороте вокруг точки O на 90° эти фигуры переходят друг в друга. В частности, площади всех четырёх фигур будут равны. Значит, 90° — одно из возможных значений угла. Покажем, что других нет. Пусть прямые l и m проходят через точку O и не являются перпендикулярными. Проведём через точку O прямую $l_\perp$ перпендикулярно прямой l и рассмотрим один из квадрантов образованных прямыми l и $l_\perp$, содержащий часть прямой m. Этот квадрант содержит ровно четверть площади восьмиугольника, поэтому часть квадранта, заключённая между прямыми l и m содержит меньше, чем четвёртую часть восьмиугольника. Это значит, что пара прямых m и l не удовлетворяет условию задачи.

ОТВЕТ: 90°.

10 КЛАСС

(**10.1**) *Известно, что* $\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = m$, $\dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = n$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $m, n > 0$. *Найдите* $\cos(\alpha-\beta)$.

Решение. Первое равенство переписывается в виде

$$\sin x(\cos\alpha - m\cos\beta) = \cos x(\sin\alpha - m\sin\beta),$$

а второе — в виде

$$\sin x(\sin\alpha - n\sin\beta) = \cos x(n\cos\beta - \cos\alpha).$$

Значит,

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin\alpha - m\sin\beta}{\cos\alpha - m\cos\beta} = \frac{n\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - n\sin\beta},$$

$$\sin^2\alpha - (m+n)\sin\alpha\sin\beta + mn\sin^2\beta = \\ = -\cos^2\alpha + (m+n)\cos\alpha\cos\beta - mn\cos^2\beta,$$

$$mn + 1 = (m+n)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

и, наконец, $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{mn+1}{m+n}$.

Ответ: $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{mn+1}{m+n}$.

(**10.2**) *Найдите все пары действительных чисел* (p, q) $(p \neq g)$ *такие, что четыре числа, являющиеся корнями уравнений* $x^2 - px - 1 = 0$ *и* $x^2 - qx - 1 = 0$, *взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию.*

Решение. Дискриминант каждого из уравнений строго положителен, поэтому уравнения имеют по два корня при любых значениях p и q. По теореме Виета произведение корней каждого из уравнений равно -1, так что корни имеют разные знаки. Пусть a и b — положительные корни первого и второго уравнений соответственно и (без ограничения общности), пусть $a > b$. (Мы учли, что $a \neq b$, так как в противном случае среди четырёх рассматриваемых чисел есть одинаковые, и арифметическую прогрессию не составить никак.) Тогда вторые корни уравнений — суть числа $-\dfrac{1}{a}$ и $-\dfrac{1}{b}$, причём $-\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы корни составляли прогрессию, — это система уравнений $a - b = b + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Отсюда $a - b = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow a - b = \dfrac{a-b}{ab} \Leftrightarrow ab = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}$. Тогда из того же условия $a - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a}$, откуда (учитывая положительность числа a) получаем, что $a = \sqrt{3}$, и, значит, $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ещё раз вспомним теорему Виета: $a - \dfrac{1}{a} = p$, поэтому $p = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Аналогично, из условия $b - \dfrac{1}{b} = q$ получаем, что $q = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ещё заметим, что если $a < b$, то значения чисел p и q меняются местами.

ОТВЕТ: $\left\{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.

(**10.3**) *Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны* 1 *см,* 3 *см и* 15 *см, а от другой (в том же порядке)* 4 *см,* 5 *см и* 11 *см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.*

Решение. Пусть a, b и c — стороны треугольника ABC, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности. Тогда для любой точки P внутри треугольника имеем $S = S_{ABP} + S_{BCP} + S_{CAP} = 0,5(c \cdot h_c + b \cdot h_b + a \cdot h_a)$, где h_a, h_b и h_c — расстояния от точки P до сторон a, b и c соответственно. В условиях нашей задачи имеем $1a+3b+15c = 2S = 4a+5b+11c$. Обозначив $x = \dfrac{a}{2S}$, $y = \dfrac{b}{2S}$ и $z = \dfrac{c}{2S}$, получим $x + 3y + 15z = 1 = 4x + 5y + 11z$ С другой стороны, $2S = (a + b + c)r$, поэтому $r = \dfrac{1}{x+y+z}$. Значит, нам достаточно найти сумму $x+y+z$. Это можно сделать разными способами. Например, так. Из первого уравнения находим, что $x = 1-3y-15z$. После подставления во второе уравнение, получим $4(1-3y-15z)+5y+11z = 1$, откуда $3 = 7y+49z$, или $y = -7z+\dfrac{3}{7}$. Подставив это значение в выражение для x, найдём, что $x = 1 + 21z - \dfrac{9}{7} - 15z = -\dfrac{2}{7} + 6z$. Тогда $x + y + z = -\dfrac{2}{7} + 6z + -7z + \dfrac{3}{7} + z = \dfrac{1}{7}$. Тогда $r = 7$.

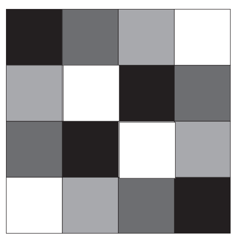
Ответ: 7.

(**10.4**) *Пусть функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям*
(1) $f(10 + x) = f(10 - x)$ *при всех* $x \in \mathbf{R}$;
(2) $f(20 + x) = -f(20 - x)$ *при всех* $x \in \mathbf{R}$.
Докажите, что функция f нечётна и периодична.

Решение. Подставляя в (1) последовательно $10-x = t$ и $10-x = -t$, получаем, что для всех действительных чисел t справедливы равенства $f(t) = f(20 - t)$ и $f(-t) = f(20 + t)$. Тогда (с учётом (2)) имеем $f(-t) = f(20 + t) = -f(20 - t) = -f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, что означает нечётность функции f. Далее, подставив в (2) $x = 20 + t$, получим $f(40 + t) = -f(-t)$, а из нечётности функции f имеем $-f(-t) = f(t)$. Значит, для всех $t \in \mathbf{R}$ имеем равенство $f(t+40) = f(t)$, т.е., что число 40 является периодом функции f. Периодичность f также доказана.

(**10.5**) *Какое наибольшее количество шахматных коней можно поставить на пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы каждый конь был под боем не более одного другого коня? Ответ обосновать.*

Решение. Если поставить всех коней на поля одного цвета, то ни один конь не будет бить никакого другого, поэтому расставить нужным образом 32 коня можно. Покажем, что 33 коня поставить не удастся. В самом деле, рассмотрим произвольные 4 поля доски A, B, C и D такие, что конь может пройти по маршруту $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$. Если на эти поля поставить три (или 4) коня, то как легко видеть, один из этих коней будет стоять под боем двух других, поэтому на 4 поля указанного вида можно поставить не более двух коней так, чтобы условие задачи выполнялось. Остаётся разбить поля шахматной доски на четвёрки указанного вида. На рисунке указано, как разбить таким образом доску 4×4 (каждая четвёрка раскрашена своим цветом). Поскольку стандартная шахматная доска есть объединение четырёх таких досок, то утверждение доказано.

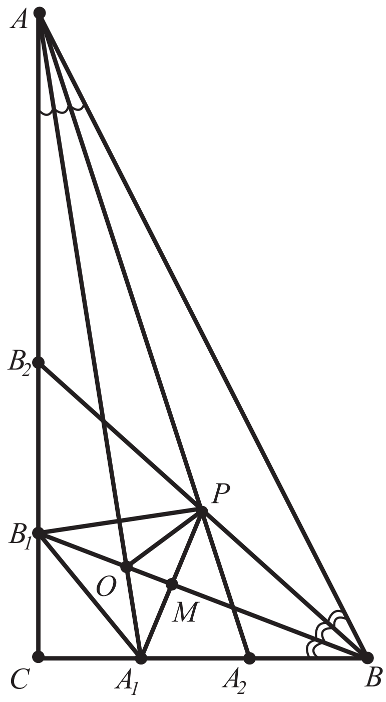


к решению задачи 10.5.

Ответ: 32.

(**10.6**) *В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены все четыре трисектрисы острых углов AA_1, AA_2, BB_1 и BB_2. (Трисектрисами угла называют лучи,* *выходящие из его вершины и делящие угол на три равные части.) Ближайшие к гипотенузе трисектрисы AA_2 и BB_2 пересекаются в точке P. Докажите, что треугольник A_1B_1P — равносторонний.*

Решение. Способ первый. Пусть $\angle BAC = 3\alpha$. Тогда $\angle BAA_2 = \angle A_2AA_1 = A_1AC = \alpha$. Кроме того, $\angle ABC = 90^\circ - 3\alpha$, откуда $\angle ABB_2 = \angle B_2BB_1 = \angle B_1BC = 30^\circ - \alpha$. Рассмотрим треугольник APB (см. рисунок). В нём известны все углы ($\angle APB = 180^\circ - \alpha - (30^\circ - \alpha) = 150^\circ$). По теореме синусов $\dfrac{BP}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin 150^\circ}$, откуда $BP = 2AB\sin\alpha$. Аналогично рассмотрим треугольник AA_1B: $\angle AA_1B = 180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - 3\alpha) = 90^\circ + \alpha$; по теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \dfrac{A_1B}{\sin 2\alpha}$, откуда $A_1B = \dfrac{2AB\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(90^\circ+\alpha)} = 2AB\sin\alpha$. Получили, что у треугольника PBA_1 равны стороны A_1B и PB. Но тогда его биссектриса BM (здесь M — точка пересечения отрезков BB_1 и A_1P) является его высотой и медианой. Но тогда отрезок B_1M является высотой и медианой треугольника A_1B_1P, поэтому $A_1B_1 = B_1P$. Аналогично доказывается, что $A_1B_1 = A_1P$. Доказательство завершено.



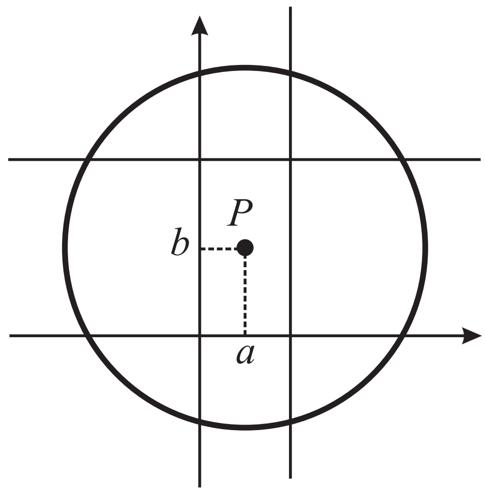
к решению задачи 10.6.

Способ второй. Пусть O — точка пересечения отрезков BB_1 и AA_1 (см. рисунок). Заметим, что $\angle AOB = 180^\circ - \dfrac{2}{3}\angle A - \dfrac{2}{3}\angle B = 180^\circ - \dfrac{2}{3}(180^\circ - \angle C) = 120^\circ$. Далее, P — точка пересечения двух биссектрис в треугольнике $\triangle AOB$, следовательно OP — биссектриса $\angle AOB$. Теперь из $\angle AOB = 120^\circ$ следует $\angle POB = \angle A_1OB = 60^\circ$, откуда $\triangle OPB = \triangle OA_1B$ по двум углам и общей стороне. Таким образом, $OP = OA_1$ и $\angle A_1OP = 120^\circ$. Аналогично рассуждая, имеем $OP = OB_1$ и $\angle B_1OP = 120^\circ$, но тогда и $OB_1 = OA_1$ и $\angle A_1OP = 120^\circ$. Теперь по двум сторонам и углу между ними имеем $\triangle A_1OP = \triangle B_1OP = \triangle A_1OB_1$, откуда $A_1P = B_1P = A_1B_1$, что и требовалось доказать.

11 КЛАСС

(**11.1**) *Точка $P(a,\, b)$ расположена на плоскости в первой координатной четверти. Рассмотрим круг радиуса большего, чем $\sqrt{a^2+b^2}$, с центром в точке P. Обозначим через S_i площадь части этого круга, лежащей в i-ом координатной четверти ($i = 1, 2, 3, 4$). Найдите $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.*

Решение. Отобразим оси координат симметрично относительно точки P. Эти образы и сами оси разобьют круг на 9 кусков: 1) лежащий в первом координатном углу прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Его площадь равна $4ab$; 2) 2 части, примыкающие к прямоугольнику сверху и снизу. Они равны, поскольку симметричны относительно горизонтальной прямой, проходящей через точку P, одна из этих частей лежит в первой, а вторая — в четвёртой координатной четверти, поэтому в сумму $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$ площади этих частей входят с противоположными знаками, и в сумме дают 0; 3) 2 части, примыкающие к прямоугольнику справа и слева. Они также равны, и их площади в сумме также обнуляются; 4) оставшиеся четыре части, имеющие с прямоугольником общую вершину. Они все также равны и их площади входят по одной в каждое из слагаемых S_i, поэтому в сумме они также дают 0. Итак, в выражении $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$ остаётся только площадь прямоугольника, поэтому оно равно $4ab$.

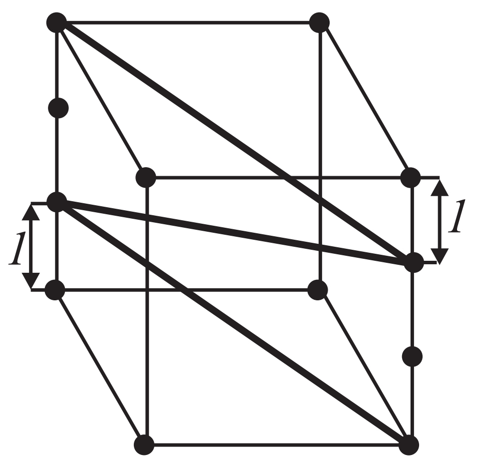


к решению задачи 11.1.

Ответ: $4ab$.

(**11.2**) *В комнате размером $3 \times 3 \times 3$ (м^3) находится кузнечик, который совершает прыжки длиной ровно $\sqrt{19}$ (м). (Кузнечик не может висеть в воздухе, поэтому конечная точка любого прыжка расположена на полу, на потолке, или на одной из стен комнаты.) За какое наименьшее число прыжков он может допрыгать из нижнего угла комнаты в самый дальний верхний? Ответ обосновать.*

Решение. Заметим, что каждая из стен, пол и потолок комнаты являются квадратами, диагональ которого равна $\sqrt{18} < \sqrt{19}$. Это означает, что в результате одного прыжка кузнечик обязательно покинет ту стену (пол или потолок) на которой находился. Поэтому после первого прыжка он окажется либо на потолке, либо на одной из противоположных стен, т.е. в одной грани с противоположным углом. А так как расстояние между противоположными углами комнаты не равно $\sqrt{19}$, в противоположный угол кузнечик пока не



к решению задачи 11.2.

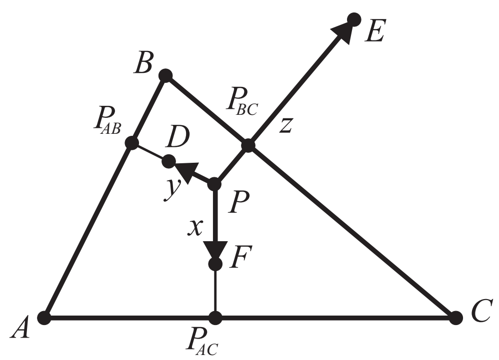
попадёт. После второго прыжка кузнечик снова поменяет стену на которой сидел, поэтому он не сможет достичь своей цели и за 2 прыжка. За три прыжка цель достижима, один из возможных маршрутов приведён на рисунке. Легко убедиться, что длина каждого звена ломаной — траектории движения кузнечика — равна $\sqrt{19}$.

Ответ: За 3 прыжка.

(**11.3**) *Пусть α, β и γ — углы некоторого треугольника. Докажите, что для всех действительных чисел x, y и z справедливо неравенство*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos\alpha - 2yz\cos\beta - 2xz\cos\gamma \geqslant 0.$$

Решение. Способ первый. Рассмотрим треугольник ABC с углами α, β, γ, отметим внутри него какую-либо точку P так, чтобы её проекции на прямые, содержащие стороны треугольника ABC, оказались на сторонах треугольника (а не на их продолжениях). Пусть P_{AB}, P_{BC} и P_{AC} — проекции точки P на стороны AB, AC, BC соответственно. Отложим на луче PP_{AB} такую точку D, что $PD = |y|$, на луче PP_B — точку E так, чтобы $PE = |z|$, а на луче PP_{AC} — точку F с условием $PF = |x|$ (см. рисунок).



к решению задачи 11.3.

Из четырёхугольника $AP_{AB}PP_{AC}$ прямым подсчётом углов находим, что $\angle DPF = \pi - \alpha$. Аналогично, $\angle DPE = \pi - \beta$ и то $\angle EPF = \pi - \gamma$. Пусть сначала числа x, y, и z неотрицательны. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}$ и подсчитаем квадрат его длины:

$$\overrightarrow{a}^2 = (\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})\cdot(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}) = \overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PE}^2+\overrightarrow{PF}^2+2(\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}) =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz\cos(\pi-\beta) + xy\cos(\pi-\alpha) + xz\cos(\pi-\gamma)) =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos\alpha - 2yz\cos\beta - 2xz\cos\gamma,$$

откуда немедленно следует доказываемое неравенство.

Теперь пусть среди чисел x, y, z есть отрицательные. Пусть, например, $x < 0$. Тогда рассмотрим вектор $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PF}$ и подсчитаем квадрат его длины — получим такое же неравенство. Аналогично поступаем, если отрицательны y, z или сразу несколько переменных.

Способ второй. Рассмотрим доказываемое неравенство как квадратное относительно переменной x. Тогда нам надо доказать, что квадратный трёхчлен $x^2 - 2x(y\cos\alpha + z\cos\gamma) + (z^2 - 2yz + y^2)$ принимает только неотрицательные значения. Для этого достаточно, чтобы его дискриминант, равный $4(y\cos\alpha + z\cos\gamma)^2 - 4(z^2 - 2yz + y^2)$ был неположительным. Имеем неравенство, которое (после сокращения на 4, раскрытия скобок и приведения подобных) имеет вид $y^2(\cos^2\alpha - 1) + 2yz(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta) + z^2(\cos^2\gamma - 1) \leqslant 0$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\cos\beta = \cos(\pi - (\alpha+\gamma)) = -\cos(\alpha+\gamma)$. С учётом этого левая часть неравенства преобразуется следующим образом:

$$y^2(1 - \cos^2\alpha) + 2yz(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma) =$$

$$= -y^2 \sin^2 \alpha + 2yz\Big(\cos\alpha\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)\Big) - z^2\sin^2\gamma =$$

$$= -\Big(y^2\sin^2\alpha - 2yz(\sin\alpha\sin\gamma) + z^2\sin^2\gamma\Big) = -(y\sin\alpha - z\sin\gamma)^2,$$

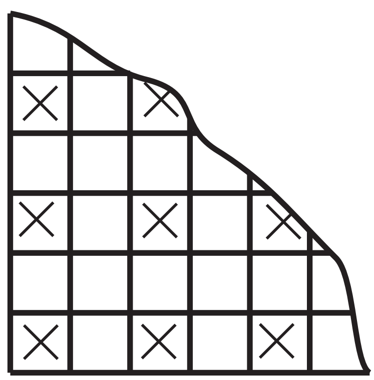
и неравенство становится очевидным.

(11.4) *На параболе $y = x^2$ выбраны любые четыре точки так, что сумма их абсцисс равна нулю. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.*

Решение. Пусть абсциссы выбранных точек равны x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, при этом $x_1 + x_2 + {} + x_3 + x_4 = 0$. Проведём через точки с абсциссами x_1, x_2 и x_3 окружность; пусть её уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Тогда абсциссы этих трёх точек удовлетворяют уравнению $(x-a)^2 + (x^2-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^4 + (1-2b)x^2 - 2ax + (a^2+b^2-R^2) = 0$, значит, многочлен в левой части имеет вид $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-m)$. По теореме Виета (или просто раскрыв скобки) получим, что $x_1+x_2+x_3+m = 0$, то есть $m = x_4$. Значит, проведённая окружность проходит и через четвёртую точку.

(11.5) *Рабочие должны выложить пол прямоугольной комнаты плитками размера 2×2 и 1×4 (размеры пола таковы, что он может быть полностью покрыт некоторым набором плиток указанных размеров). Заказчиком было подготовлено нужное количество плиток каждого размера. Однако при переносе их к месту работы три плитки размером 2×2 разбились. Их решили заменить тремя плитками размера 1×4. Докажите, что теперь выложить поверхность этого пола имеющимися плитками не удастся.*

Решение. Пусть пол некоторой комнаты удалось покрыть плитками указанного размера. Разделим поверхность пола на квадраты 1×1 и выделим некоторые квадраты в которых нарисуем какой-нибудь рисунок, например, розу. Квадраты будем выделять следующим образом: в первом ряду, примыкающем к стенке, выделим каждый второй квадрат, начиная от левого угла, второй ряд пропустим, в третьем опять выделим каждый второй, начиная с левого, четвёртый снова пропустим и т.д. Получим узор, как показано на рисунке (вместо роз стоят крестики). Теперь заметим, что как бы ни располагались паркетные плитки, на каждой паркетине 2×2 окажется ровно одна роза, а на каждой паркетине 1×4 либо ровно 2 розы, либо ни одной. Таким образом, чётность числа роз совпадает с чётностью числа квадратных паркетин. Ясно, что при указанной в условии замене чётность квадратных паркетин меняется. А число роз остаётся тем же самым. Значит, покрыть пол новым набором не представляется возможным.



к решению задачи 11.5.

(11.6) *Докажите, что если $|ax^2+bx+c| \leqslant \dfrac{1}{2}$ при всех $|x| \leqslant 1$, то $|ax^2+bx+c| \leqslant x^2 - \dfrac{1}{2}$ при всех $|x| \geqslant 1$.*

Решение. Способ первый. Подставляя поочерёдно $x = 0$, $x = 1$ и $x = -1$, имеем $|c| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $|a+b+c| \leqslant \dfrac{1}{2}$ и $|a-b+c| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Пусть $f(x) = ax^2+bx+c - \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)$. Заметим, что $f(0) = c + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$, $f(1) = a + b + c - \dfrac{1}{2} \leqslant 0$ и $f(-1) = a - b + c - \dfrac{1}{2} \leqslant 0$. Если $a = 1$, то $f(x)$ — линейная функция, и из полученных неравенств следует, что $f(x) \equiv 0$; в этом случае утверждение задачи очевидно. Пусть $a \neq 1$. Тогда $f(x)$ — это квадратный трёхчлен, его график — парабола, из тех же неравенств следует, что на отрезках $[-1;\,0]$ и $[0;\,1]$ парабола имеет по корню, а её ветви направлены вниз. Тогда при всех x таких, что $|x| > 1$ значение $f(x)$ отрицательно, т.е. $ax^2 + bx + c \leqslant x^2 - \dfrac{1}{2}$ при $|x| \geqslant 1$ (1). Аналогично, рассмотрев функцию $g(x) = -ax^2 - bx - c - \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)$, мы увидим, что $g(0) \geqslant 0$, $g(1) \leqslant 0$ и $g(-1) \leqslant 0$. Повторяя предыдущее доказательство получим, что $-(ax^2 + bx + c) \leqslant x^2 - \dfrac{1}{2}$ при $|x| \geqslant 1$ (2). Объединяя (1) и (2), получаем, что при$|x| \geqslant 1$ верно $-\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant x^2 - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |ax^2 + bx + c| \leqslant x^2 - \dfrac{1}{2}$, что и требуется доказать.

Способ второй. Введём многочлен $Q(x) = x^2 - 1/2$. Исходное утверждение эквивалентно следующему: пусть у многочлена $P(x) = ax^2 + bx + c$ имеется точка $x\,(|x| \geqslant 1)$, для которой $|P(x)| > Q(x)$. Доказать, что для некоторой точки $y, |y| \leqslant 1$ выполнено $|P(y)| > 1/2$. Заменяя при необходимости x на $-x$, $P(x)$ на $P(-x)$ можно считать, что $x \geqslant 1$ и $P(x) > Q(x)$. Поскольку для $x = 1$ достаточно принять $y = 1$, то можно также считать, что $x > 1$. Докажем утверждение методом “от противного”, пусть у квадратного трёхчлена $P(x)$ имеется точка $x > 1$ для которой $P(x) > Q(x)$ и при этом для всех $y, |y| \leqslant 1$ выполнено неравенство $|P(y)| > 1/2$. Тогда, в частности, $P(1) < Q(1) = 1/2$, $P(0) > Q(0) = -1/2$, $P(-1) > Q(-1) = 1/2$. Тогда каждый из промежутков $(-1; 0), (0; 1), (1; x)$ содержит по корню уравнения $P(x) = Q(x)$, следовательно, уравнение степени не выше двух имеет как минимум три корня. Полученное противоречие завершает доказательство.