ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2009 — 2010 учебный год

6 — 7 класс

6 — 7.1. *Из шляпы, содержащей 10 карточек с номерами от 1 до 10, пять мальчиков вытянули по две карточки (оставив шляпу пустой) и сообщили директору олимпиады сумму их номеров: Серёжа — 11, Федя — 4, Андрей — 7, Игорь — 16, Саша — 17. Может ли директор олимпиады однозначно установить номера карточек, которые вытащил каждый из мальчиков? Ответ обосновать.*

РЕШЕНИЕ: Число 4 единственным образом представляется в виде суммы двух различных натуральных чисел, не превосходящих 10: $4 = 1 + 3$, поэтому Федя вытащил карточки с номерами 1 и 3. Число 7 представляется тремя такими способами: $7 = 1+6 = 2+5 = 3+4$, но два из них не осуществимы, так как карточки с номерами 1 и 3 уже вытянуты Федей. Значит, Андрей вытащил карточки 2 и 5. Из оставшихся чисел можно единственным образом получить сумму 11: $11 = 4+7$, карточки именно с такими номерами вытащил Серёжа. Из оставшиеся карточек сумму 16 даёт единственная пара: карточки с номерами 6 и 10 — эти карточки вытащил Игорь. Значит, Саша вытащил оставшиеся карточки с номерами 8 и 9. Таким образом, однозначно устанавливается какую из карточек вытянул каждый мальчик.

ОТВЕТ: Может.

6 — 7.2. *Известно, что числа $x+y$ и $4x+y$ положительны. Может ли число $8x + 5y$ быть отрицательным? А число $2x + 5y$? Почему?*

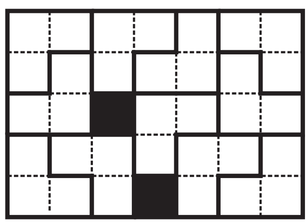
РЕШЕНИЕ: а) Так как $8x + 5y = (4x + y) + 4(x + y)$, число $8x + 5y$ положительно, как сумма пяти положительных чисел.

б) Пусть, например $x = 5$, $y = -3$. Тогда $x + y = 2 > 0$, $4x + y = 17 > 0$, но $2x + 5y = -5 < 0$. Конечно, пример не единственен. Для нахождения всех таких пар достаточно изобразить на плоскости xOy решения трёх соответствующих линейных неравенств.

ОТВЕТ: а) нет; б) да.

РЕШЕНИЕ:

6 — 7.3. *Какое наибольшее число уголков, состоящих из трех квадратиков 1×1, можно поместить в прямоугольник 5×7? Уголки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Ответ обосновать.*



Площадь прямоугольника равна 35 клеткам, а площадь одного уголка равна 3 клеткам; таким образом, в прямоугольник может быть помещено (без наложений) не более $35 : 3 = 11,(6)$ уголков, т.е. их не больше 11.

На рисунке приведён пример (он, конечно, не единственный), показывающий, как можно поместить в прямоугольнике 11 уголков (чёрным цветом отмечены клетки, не покрытые уголками).

ОТВЕТ: 11 уголков.

6 — 7.4. *Роща состоит из* 300 *деревьев. Известно, что если пометить любые* 201 *из них, то среди помеченных деревьев непременно найдутся дуб, берёза и ель. Один чудак утверждает, что в таком случае роща состоит из* 100 *дубов,* 100 *берёз и* 100 *елей. Прав ли этот чудак? Ответ обосновать.*

РЕШЕНИЕ: Допустим, что чудак ошибается. Так как всего деревьев 300, то в этом случае деревьев какого-то из перечисленных видов (допустим, дубов, остальные случаи аналогичны) меньше одной трети, т.е. меньше 100. Но тогда деревьев, отличных от дубов, будет не менее 201; отметим любые 201 из них и получим противоречие с условием задачи. Значит, допущенное предположение неверно.

ОТВЕТ: Чудак прав.

6 — 7.5. *Герасим после прощания с Муму набрал в лодку очень много воды (более* 10 *литров). У него есть два ведра, одно вмещает ровно* 5 *литров, а про другое Герасим знает, что оно вмещает то ли ровно* 3 *литра, то ли ровно* 4 *литра. Помогите Герасиму вылить из лодки ровно* 9 *литров воды. Заглядывая в ведро, нельзя понять, сколько в нём воды.*

РЕШЕНИЕ: Прежде всего, Герасиму следует определить сколько в точности литров вмещает в себя второе ведро. Это может быть осуществлено, например, так (способ не единственный): набрать полное меньшее ведро и опорожнить его в большее, затем вновь наполнить меньшее ведро и долить большее до предела, затем большее опорожнить, и остаток воды из меньшего ведра вновь вылить в пятилитровое. Затем вновь наполнить меньшее ведро и вылить его в большее. Если это удастся (вода не перельётся через край), то объём меньшего ведра не больше, чем 10:3 литра, т.е. ведро трёхлитровое. Если нет — то объём меньшего ведра более 10:3 литра, т.е. равен 4 литрам.

Теперь, если ведро трёхлитровое, то следует вылить из лодки ровно 3 меньших ведра, а если четырёхлитровое — одно большее и одно меньшее.

6 — 7.6. *Пять моряков на необитаемом острове насобирали кокосовых орехов. Потом они поделили орехи так: первый из них угостил орехом мартышку и взял ровно* $1/5$ *часть оставшихся орехов; точно также один за другим поступили и остальные* 4 *моряка, после этого они в шестой раз угостили мартышку одним орехом, а остальные поделили поровну (в процессе дележа все орехи оставались целыми). Определите, какое минимальное число кокосовых орехов могло быть собрано моряками. Ответ обосновать.*

РЕШЕНИЕ: Заметим, что если бы пять моряков каким-либо образом смогли бы собрать ровно -4 ореха, то вся описанная в задаче история могла бы осуществиться, но это число меньше нуля, а потому не подходит под реалии задачи.

Пусть есть такое положительное число орехов, что данная операция с ними возможна. Разделим эту кучу на две. В одной будет -4 ореха, в другой — все остальные. Пусть моряки угощали мартышку из первой кучи, тогда все, что они делали со второй кучей — забирали у ней пять подряд по одной пятой части (фактически домножив это число на $\frac{4^5}{5^5}$), а потом ещё раз поделили на 5. Это возможно только тогда, когда число орехов во второй куче делится на 5^6. Отсюда минимальное положительное возможное число орехов во второй куче должно быть не меньше 5^6. Тогда в исходной куче их было минимум $5^6 - 4 = 15621$.

Проверка показывает, что это число подходит.

ОТВЕТ: 15621 орехов.

Составители: Шевалдин В.Т., Нохрин С.Э., Хлопин Д.В.
http://acm.usu.ru

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2009 — 2010 учебный год

8 класс

8.1. *Петя отпил 1/6 часть полной чашки чёрного кофе, а потом долил чашку до краёв молоком. Потом Петя отпил 1/3 часть чашки и опять долил доверху молоком. Наконец Петя выпил полную чашку. Чего Петя выпил больше: кофе или молока и во сколько раз? Ответ обоснуйте.*

РЕШЕНИЕ: Всего было выпито $1+1/6+1/3 = 1,5$ чашек жидкости, при этом чистого кофе ровно 1 чашка. Значит, молока было выпито $1,5 - 1 = 0,5$ чашки, т.е. вдвое меньше, чем кофе.

ОТВЕТ: Было выпито в два раза больше кофе.

8.2. *Вася участвовал в нескольких интернет-каруселях. Если бы на последней карусели он заработал 72 балла, то его средний балл за все эти карусели равнялся бы 83. А если бы на последней карусели он заработал 56 баллов, то его средний балл (также за все карусели) был бы 81. В скольких каруселях участвовал Вася? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.*

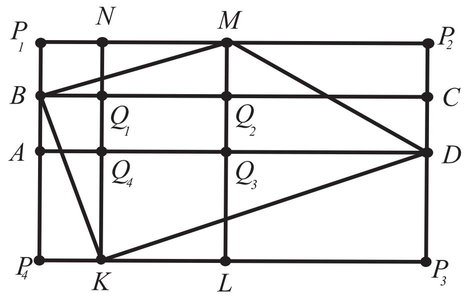
РЕШЕНИЕ: Способ первый. Пусть Вася участвовал в n каруселях. Пусть, кроме того, в сумме на предыдущих $n-1$ Интернет-каруселях он набрал a баллов. По условию задачи $a + 72 = 83n$ и $a + 56 = 81n$. Вычтем из первого равенства второе и получим $16 = 2n$, откуда $n = 8$.

Способ второй. Разность чисел 72 и 56 равна 16, а 83 и 81 равна 2, т.е. уменьшение суммарного числа баллов на 16 ведёт к уменьшению среднего на 2. Это означает, что 16 "лишних" баллов распределены поровну (по 2) на все карусели. Значит, всего каруселей $16 : 2 = 8$.

ОТВЕТ: В 8 каруселях.

8.3. *Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ так расположены на плоскости, что*
1) их стороны соответственно параллельны, причём AB параллельна KN,
2) эти прямоугольники имеют непустое пересечение, однако вершины каждого из них не принадлежат другому,
3) ближайшей из вершин прямоугольника $KLMN$ к вершине A является точка K.

Докажите, что площадь четырёхугольника $ALCN$ равна площади четырёхугольника $KDMB$.



РЕШЕНИЕ: Пусть прямые MN и AB пересекаются в точке P_1, прямые MN и CD — в точке P_2, прямые CD и KL — в точке P_3, прямые KL и AB — в точке P_4, прямые KN и BC — в точке Q_1, прямые BC и ML — в точке Q_2, прямые ML и AD — в точке Q_3, а прямые AD и KN — в точке Q_4 — см. рисунок.

Тогда

$$S_{BMDK} = S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} + S_{BQ_2M} + S_{MQ_3D} + S_{DQ_4K} + S_{KQ_1B} =$$

$$= S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} + 0,5S_{BQ_2MP_1} + 0,5S_{MQ_3DP_2} + 0,5S_{DQ_4KP_3} + 0,5S_{KQ_1BP_4} =$$

$$= 0,5S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} + 0,5(S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} + S_{BQ_2MP_1} + S_{MQ_3DP_2} + S_{DQ_4KP_3} + S_{KQ_1BP_4}) =$$

$$= 0,5S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} + 0,5S_{P_1P_2P_3P_4}.$$

Аналогично доказывается, что $S_{BMDK} = 0,5S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} + 0,5S_{P_1P_2P_3P_4}$, откуда следует требуемое равенство.

8.4. *Про действительные числа a, b, c, d известно, что $ac-3bd=m$, $ad+bc=n$. Выразите $(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$ через m и n. Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.*

РЕШЕНИЕ: Возведём в квадрат каждое из данных равенств:

$$(ac-3bd)^2 = m^2 \Leftrightarrow (ac)^2 + 9(bd)^2 - 6abcd = m^2;$$

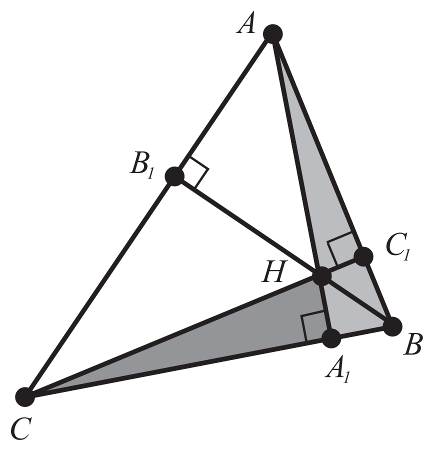
$$(ad+bc)^2 = n^2 \Leftrightarrow (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd = n^2.$$

Избавимся от произведения $abcd$, для чего прибавим к первому равенству утроенное второе, и получим $a^2c^2+9b^2d^2+3a^2d^2+3b^2c^2 = m^2+3n^2$. Остаётся заметить, что $a^2c^2+9b^2d^2+3a^2d^2+3b^2c^2 = (a^2c^2+3a^2d^2)+(3b^2c^2+9b^2d^2) = a^2(c^2+3d^2)+3b^2(c^2+3d^2) = (a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$.

ОТВЕТ: m^2+3n^2.

8.5. *В остроугольном треугольнике ABC точка H — точка пересечения его высот. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB. Ответ обоснуйте.*

РЕШЕНИЕ: Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Рассмотрим треугольники BCC_1 и BAA_1. Они прямоугольные и имеют общий острый угол B, поэтому равны и их другие острые углы: $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$. Тогда прямоугольные треугольники ABA_1 и CHB_1 равны по гипотенузе и острому углу, откуда следует равенство катетов, лежащих против равных углов. Получили $AA_1 = CA_1$. Но тогда треугольник ACA_1 равнобедренный и прямоугольный, откуда $\angle ACB = 45°$

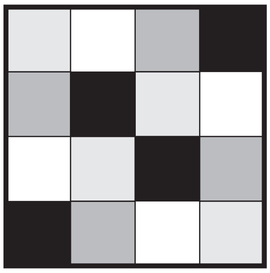


ОТВЕТ: $\angle ACB = 45°$.

8.6. *Какое наибольшее количество коней можно поставить на изначально пустую шахматную доску 8×8 так, чтобы каждый конь был под боем не более одного другого коня? Ответ обоснуйте.*

РЕШЕНИЕ: Если поставить всех коней на поля одного цвета, то ни один конь не будет бить никакого другого, поэтому расставить нужным образом 32 коня можно. Покажем, что 33 коня поставить не удастся. В самом деле, рассмотрим произвольные 4 поля доски A, B, C и D такие, что конь может пройти по маршруту $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$. Если на эти поля поставить три (или 4) коня, то как легко видеть, один из этих коней будет стоять под боем двух других, поэтому на 4 поля указанного вида можно поставить не более двух коней так, чтобы условие задачи выполнялось. Остаётся разбить поля шахматной доски на четвёрки указанного вида. На рисунке указано, как разбить таким образом доску 4×4 (каждая четвёрка раскрашена своим цветом). Поскольку стандартная шахматная доска есть объединение четырёх таких досок, то утверждение доказано.

ОТВЕТ: 32 коня.



ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2009 — 2010 учебный год

9 класс

9.1. *В выражении*

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

из 11 *символов зачеркните ровно три так, чтобы значение этого выражения стало равно* 2010.

РЕШЕНИЕ: Заметим, что $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Значит, в выражении следует стереть число 4 и два знака умножения, один между шестёркой и семёркой, второй — один из знаков, примыкающих к цифре 4.

ОТВЕТ: $2 \times 3 \times 5 \times 67$

9.2. *Докажите, что для любых целых чисел* x, y *и* z *число*

$$T = 2\Big(|(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)|+$$

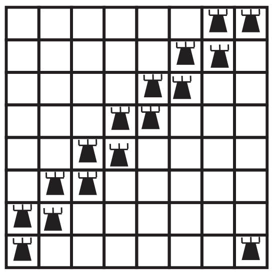
$$+|x-y||y-z|+|y-z||z-x|+|z-x||x-y|\Big)$$

равно квадрату целого числа.

РЕШЕНИЕ: Способ первый. Положим $A = |x-y||y-z|+|y-z||z-x|+|z-x||x-y|$. Тогда $T = 2\Big(|xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2|+A\Big) = |-(x-y)^2-(x-z)^2-(y-z)^2|+2A = |x-y|^2+|x-z|^2+|y-z|^2+2(|x-y||y-z|+|y-z||z-x|+|z-x||x-y|) = (|x-y|+|x-z|+|y-z|)^2$.

Способ второй. Положим $x-y=a$, $y-z=b$ и $z-x=c$. Тогда $a+b+c=0$, а $T = 2(|ab+bc+ca|+|ab|+|bc|+|ca|)$. Из первого равенства следует, что числа a, b и c не могут быть одного знака; пусть $a, b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $ab \geqslant 0$, $bc \leqslant 0$, $ca \leqslant 0$. Кроме того, $ab+bc+ca = ab+c(a+b) = ab-c^2 < 0$, так как $|c| \geqslant |a|$ и $|c| \geqslant |b|$. Поэтому $T = 2(-ab-bc-ca+ab-bc-ca) = 4(-bc-ca) = 4c(-a-b) = 4c^2$, что завершает доказательство.

9.3. *Расставьте на шахматной доске* 8×8 *наибольшее количество ладей так, чтобы каждая била ровно две других.*



РЕШЕНИЕ: На рисунке указано, как можно расставить 16 ладей с выполнение требуемого свойства (пример далеко не единственно возможный). Покажем, что число 16 — максимально. Для этого докажем следующее утверждение.

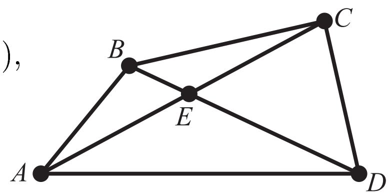
Утверждение: На доске $n \times n$ можно поставить не более $2n$ ладей, так, чтобы каждая била ровно две другие.

Доказательство утверждения. Периметр доски равен $4n$. Всякую лежащую на границе доски сторону клетки назовем воротами (всего ворот $4n$). Каждая ладья бьёт ровно в 4 направлениях, на пути в точности двух из них стоят ладьи; идя в каждом из двух оставшихся направлений ладья может покинуть доску пройдя через некоторые ворота. В каждые ворота может выйти только одна ладья (если бы таких ладьи было хотя бы 2, то та ладья, что ближе к воротам загораживала б их от другой) и только по одному направлению, следовательно общее количество свободных направлений не превосходит числа ворот, то есть $4n$. Тогда число ладей не превосходит $2n$, так как каждая ладья имеет в точности два свободных направления.

ОТВЕТ: 16 ладей.

9.4. *Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника с целыми площадями. Докажите, что площадь четырёхугольника — составное число. (Натуральное число называется составным, если у него есть хотя бы один делитель, отличный от единицы и от него самого.)*

РЕШЕНИЕ:



Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, E — точка пересечения его диагоналей (см. рисунок), $\angle AEB = \alpha$. Тогда (учитывая, что $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$), получим $S_{ABE} \cdot S_{CDE} = (0,5\cdot AE\cdot BE\cdot\sin\alpha)\cdot(0,5\cdot CE\cdot DE\cdot\sin\alpha) = (0,5\cdot AE\cdot DE\cdot\sin(180^\circ-\alpha))\cdot(0,5\cdot CE\cdot BE\cdot\sin(180^\circ-\alpha)) = S_{ADE}\cdot S_{BCE}$. Так как $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BCE} + S_{CDE} + S_{ADE}$, остаётся доказать следующий факт: если a, b, c, d — натуральные числа, удовлетворяющие равенству $ab = cd$, то число $a+b+c+d$ — составное. Докажем его. Пусть p — наибольший общий делитель чисел a и c, т.е. $a = a_1\cdot p$, $c = c_1\cdot p$, числа c_1 и a_1 — взаимно просты. Пусть также q — наибольший общий делитель чисел b и d ($b = b_1\cdot q$, $d = d_1\cdot q$, числа b_1 и d_1 — взаимно просты). Тогда условие $ab = cd$ равносильно $a_1pb_1q = c_1pd_1q \Leftrightarrow a_1b_1 = c_1d_1$. Отсюда число a_1b_1 делится на c_1, и в силу взаимной простоты чисел a_1 и c_1 число b_1 делится на c_1. С другой стороны, число c_1d_1 делится на b_1, и в силу взаимной простоты чисел b_1 и d_1 число c_1 делится на b_1. Итак, натуральные числа b_1 и c_1 делятся друг на друга, поэтому они равны, а тогда из равенства $a_1b_1 = c_1d_1$ находим, что $a_1 = d_1$. Имеем $a+b+c+d = pa_1+qb_1+pc_1+qd_1 = p(a_1+c_1)+g(b_1+d_1) = p(d_1+b_1)+q(b_1+d_1) = (p+q)(b_1+d_1)$ — число составное, так как каждый из множителей $p+q$ и (b_1+d_1) — натуральное число, большее 1.

9.5. *Фирма «Рога и копыта» закупила счётную машинку, которая для любых введенных действительных чисел a и b может выполнить только одну операцию: вычислить число $1 - \dfrac{a}{b}$ (и выдать его на экран). Тем не менее, Остап Бендер научился выполнять на этой машинке все четыре арифметические действия. Как ему это удалось?*

РЕШЕНИЕ: Обозначим $a\circ b = 1-\frac{a}{b}$. Заметим сначала, что для любых a, b, c, d

$(b, d \neq 0)$ выполнено

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = 1 - \frac{1 - \frac{a}{b}}{1 - \frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{1 - \frac{c}{d}}$$

Отсюда $\frac{a}{b} = (a \circ b) \circ (0 \circ 1) = a \circ b \circ 1$. Таким образом, деление осуществимо. В частности, Бендер может подсчитать и $1/b = (1 \circ b) \circ 1$. Но тогда он может и умножать ненулевые числа, поскольку $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}}$.

Заметим, что

$$a - c = \frac{\frac{a}{1} - \frac{c}{1}}{1 - \frac{c}{1}}(1 - \frac{c}{1}) = ((a \circ 1) \circ (c \circ 1)) \cdot (c \circ 1),$$

то есть Бендер умеет и вычитать (кроме единицы — произойдёт деление на ноль, но это можно подсчитать, например, по формуле $a - 1 = \frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = 1 \circ a \circ (1 \circ a \circ 1) \circ 1)$.

Вместо сложения b и a надо сделать вычитание из b выражения $-a$.

При должном желании можно получить и соответствующие формулы:

$$\frac{a}{b} = a \circ b \circ 1, \quad ab = a \circ (1 \circ b \circ 1) \circ 1 \quad (b \neq 0),$$

$$a - c = a \circ 1 \circ (c \circ 1) \circ (1 \circ (c \circ 1) \circ 1) \circ 1 \quad (c \neq 1),$$

$$a + b = b \circ 1 \circ (a \circ (2 \circ 1) \circ 1 \circ 1) \circ (1 \circ (a \circ (2 \circ 1) \circ 1 \circ 1) \circ 1) \circ 1 \quad (a \neq -1),$$

$$a + b = a \circ (2 \circ 1) \circ 1 \circ 1 \circ (b \circ 1) \circ (1 \circ (b \circ 1) \circ 1) \circ 1 \circ (2 \circ 1) \circ 1 \quad (b \neq 1).$$

Приведённые формулы, безусловно, неединственны, например,

$$(a \circ b) \circ (b \circ a) = \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2 - b^2}{b(a - b)} = \frac{a + b}{b}.$$

Тогда $a + b = a \circ b \circ (b \circ a) \cdot b$ и для всех $a \neq b \neq 0$ имеем

$$a + b = a \circ b \circ (b \circ a) \circ (1 \circ b \circ 1) \circ 1.$$

Кроме того, например, $a \circ (2 \circ 1) \circ b \circ (a \circ b) = (1 + a) \circ b \circ (a \circ b) = \frac{\frac{1+a}{b} - \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{1}{b-a}$ и при $0 \neq a \neq b \neq 0$

$$b - a = 1 \circ (a \circ (2 \circ 1) \circ b \circ (a \circ b)) \circ 1.$$

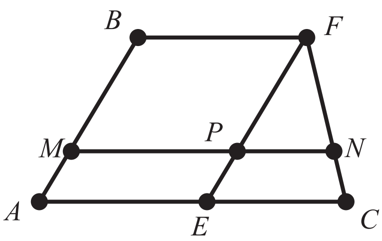
9.6. *На плоскости изображён треугольник ABC.*

а) С помощью циркуля и линейки проведите прямую, параллельную стороне AC, которая делит треугольник на два многоугольника равного периметра.

б) Решите аналогичную задачу для трапеции $ABFC$ ($BF \parallel AC$).

РЕШЕНИЕ: Анализ: Решаем пункт б). Пусть требуемая прямая проведена, и пусть M и N — точки её пересечения со сторонами AB и FC трапеции $ABFC$. Тогда $P_{AMNC} = P_{MBFN}$. Можно полагать, без ограничения общности, что BF — меньшее основание. Тогда проведём через точку F прямую, параллельную стороне AB; эта прямая пересечёт отрезки MN и AC в некоторых точках; обозначим их через P и E (см. рисунок). Тогда $P_{MBFN} = MB + BF + FN + NM = PF + BF + FN + NP + PM = P_{PNF} + 2BF$. Аналогично $P_{AMNC} = P_{AMNC} + 2BF$, откуда $P_{PNF} = P_{AMNC}$. Таким образом, решение пункта б) сводится к решению пункта а).

Пусть теперь требуемая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно. Отложим на лучах MB и NB отрезки $MT = MA$ и $NP = NC$. Тогда прямые TK и AC будут параллельны. Кроме того, так как $MK + KB + BT + TN + NM = P_{MNB} = P_{AMNC} = AM + MN + NC + AC$, получим $AC = KB + BT$. Отметим на отрезке AC точку L так, что $AL = KB$. Тогда $CL = BT$. Из подобных треугольников PKT и PAC находим, что $AB : BC = KB : BT = AL : LC$. Но последнее равенство означает, что точка L — основание биссектрисы угла B.



Построение: В случае а) проводим BL биссектрису угла B, на стороне BA откладываем отрезок $BK = AL$ (или на стороне BC отрезок $BT = CL$). Через середину отрезка AK (или CT) проводим прямую, параллельную стороне AC. Эта прямая искома. В случае б) проводим прямую $FE \parallel AB$ и осуществляем указанное построение для треугольника EFC.

Доказательство: Прямая MN параллельна стороне AC по построению. Равенство периметров полученных фигур проверяется непосредственно путём сравнения соответствующих отрезков.

Исследование: Если провести прямую, параллельную стороне AC через точку M стороны AB, близкую к B, то периметр четырёхугольника $AMNC$ будет почти равен периметру начальной фигуры P. При движении точки M по стороне AB от B к A периметр будет монотонно и непрерывно убывать до величины $2AC$. Периметр верхней фигуры, наоборот, будет монотонно возрастать от 0 до P. Так как $P > 2AC$, в некоторой точке, и при том единственной, периметры обеих фигур совпадут. Значит, задача всегда имеет единственный ответ.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2009 — 2010 учебный год

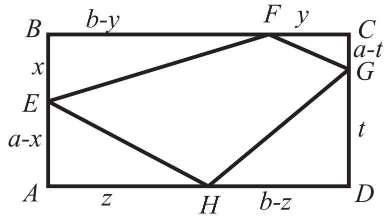
10 класс

10.1. *Известно, что* $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant b$. *Докажите неравенство*

$$\sqrt{x^2+(b-y)^2}+\sqrt{y^2+(a-t)^2}+\sqrt{t^2+(b-z)^2}+\sqrt{z^2+(a-x)^2} \leqslant 2(a+b).$$

РЕШЕНИЕ:

Способ первый. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $AD=b$. Отметим на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно точки E, F, G и H, так что $EB=x$, $FC=y$, $GD=t$ и $HA=z$. Тогда $\sqrt{x^2+(b-y)^2}=EF$, $\sqrt{y^2+(a-t)^2}=FG$, $\sqrt{t^2+(b-z)^2}=GH$, $\sqrt{z^2+(a-x)^2}=HE$. Таким образом, неравенство, которое требуется доказать, превращается в очевидное $P_{EFGH} \leqslant P_{ABCD}$.



Способ второй. Для любых положительных чисел α и β выполняется неравенство $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant \alpha+\beta$, что легко доказывается. Поэтому

$$\sqrt{x^2+(b-y)^2}+\sqrt{y^2+(a-t)^2}+\sqrt{t^2+(b-z)^2}+\sqrt{z^2+(a-x)^2} \leqslant$$

$$\leqslant x+(b-y)+y+(a-t)+t+(b-z)+z+(a-x)=2(a+b).$$

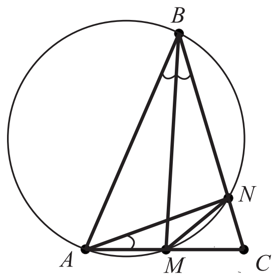
10.2. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию:* $x_n+x_{n+2}=x_{n+1}$ *для всех* $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. *Барон Мюнхгаузен утверждает, что он знает одно замечательное натуральное число* m, *при котором для любого натурального числа* n *имеет место равенство* $x_{n+m}=x_n$. *Не заврался ли барон?*

РЕШЕНИЕ: Пусть k — произвольное натуральное число. Так как $x_n+x_{n+2}=x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то подставив вместо n значения $n=k$, и $n=k+1$ получим верные равенства $x_k+x_{k+2}=x_{k+1}$ и $x_{k+1}+x_{k+3}=x_{k+2}$. Сложим эти равенства почленно и получим $x_k+x_{k+2}+x_{k+1}+x_{k+3}=x_{k+1}+x_{k+2}$, откуда $x_k=-x_{k+3}$. Аналогично получаем $x_{k+3}=-x_{k+6}$, откуда $x_k=x_{k+6}$. Таким образом, в качестве натурального числа m может быть взято число 6 (или любое натуральное число, кратное 6).

ОТВЕТ: Барон не обманывает.

10.3. *В треугольнике ABC проведена биссектриса BM угла B. На стороне CB отметили такую точку N, что $\angle CAN = \angle ABM$. Докажите, что отрезки AM и MN равны.*

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим окружность, описанную около треугольника AMN (см. рисунок). Так как точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой MN и $\angle MAN = \angle ABM = \angle MBN$, то точка B лежит на этой окружности. Тогда дуги MA и MN равны, так как на них опираются равные вписанные углы. Но тогда равны и стягивающие их хорды. Утверждение доказано.



10.4. *Точка M лежит на окружности, описанной около данного равностороннего треугольника ABC. Докажите, что величина $MA^4 + MB^4 + MC^4$ не зависит от выбора точки M.*

РЕШЕНИЕ: Пусть точка M лежит на дуге AC, не содержащей точку B. Пусть также $\angle ABM = \alpha$. Ясно, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. По теореме синусов для треугольника ABM находим $AM = 2R\sin(\angle ABM) = 2R\sin\alpha$). Аналогично из треугольника BMC видим, что $CM = 2R\sin(60^\circ - \alpha)$. Углы CAM и ABM равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, поэтому из треугольника AMB находим, что $MB = 2R\sin(60^\circ + \angle CAM) = 2R\sin(60^\circ + \alpha)$. Тогда надо доказать, что выражение $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 16R^4(\sin^4\alpha + \sin^4(60^\circ - \alpha) + \sin^4(60^\circ + \alpha))$ не зависит от α. Преобразуем это выражение:

$$16R^4(\sin^4\alpha + \sin^4(60^\circ - \alpha) + \sin^4(60^\circ + \alpha)) =$$

$$= 16R^4\left(\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos(120^\circ - 2\alpha)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos(120^\circ + 2\alpha)}{2}\right)^2\right) =$$

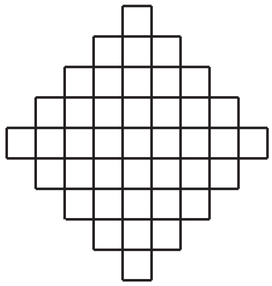
$$= 4R^4(3 - 2(\cos 2\alpha + \cos(120^\circ - 2\alpha) + \cos(120^\circ + 2\alpha)) +$$
$$+ (\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ - \alpha) + \cos^2(60^\circ + \alpha))) =$$
$$= 4R^4(3 - 2(\cos 2\alpha + \cos(120^\circ - 2\alpha) + \cos(120^\circ + 2\alpha)) +$$
$$+ \left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2} + \frac{1+\cos(240^\circ - 4\alpha)}{2} + \frac{1+\cos(240^\circ + 4\alpha)}{2}\right) =$$
$$= 18R^4 - 4R^4(\cos 2\alpha + \cos(120^\circ - 2\alpha) + \cos(120^\circ + 2\alpha)) +$$
$$+ 2R^4(\cos 4\alpha + \cos(240^\circ - 4\alpha) + \cos(240^\circ + 4\alpha)) =$$
$$= 18R^4 - 4R^4(\cos 2\alpha + \cos(120^\circ - 2\alpha) + \cos(120^\circ + 2\alpha)) +$$
$$+ 2R^4(\cos 4\alpha + \cos(120^\circ + 4\alpha) + \cos(120^\circ - 4\alpha)).$$

Так как для любого x выражение $\cos x + \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$, то каждая из скобок в последнем выражении равна нулю, и $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$, что завершает доказательство.

10.5. *а) Расставьте на шахматной доске 8×8 наибольшее количество ладей так, чтобы каждая била ровно две других.*

б) Какое наибольшее количество слонов можно расставить на изображённой на рисунке доске так, чтобы каждый слон бил ровно двух других? Приведите пример такой расстановки и докажите, что большего числа слонов расставить требуемым образом нельзя.

РЕШЕНИЕ: а) см. решение задачи 9.2.



б) Раскрасим доску в шахматном порядке, тогда для слонов на одном цвете задача сводится к ладьям на доске 5×5, а для слонов на другом цвете сводится к ладьям на доске 4×4. Эти расположения никак не зависят друг от друга, поэтому максимальное число слонов на исходной доске равно сумме максимальных на этих двух.

На первой доске стоит не более 10 ладей (см. доказательство утверждения в задаче 9.2.), а на второй — не более 8 ладей. Пример расстановки ладей на этих досках даёт нам пример соответствующей расстановки слонов уже на исходной доске.

ОТВЕТ: а) 16 ладей; б)18 слонов.

10.6. *На множестве действительных чисел введена операция, которая каждой паре чисел x и y ставит в соответствие число $x \circ y$, и при этом для любых чисел x, y, z имеют место равенства:*

1) $(x+y) \cdot (x \circ y) = x^2 \circ y^2$,

2) $x \circ y = (x+z) \circ (y+z)$,

3) $1 \circ 0 = 1$.

Выразите эту операцию через четыре арифметических действия. Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим произвольное число a и вместе с ним число $b = \frac{1-a}{2}$. Применяя последовательно третье и второе свойство из равенства $1-2b = a$, имеем

$$a = a(1 \circ 0) = a((1-b) \circ (-b)) = (1-b-b)((1-b) \circ (-b)).$$

В силу первого свойства и равенства $1-2b = a$ это преобразование можно продолжить

$$a = (1-b)^2 \circ b^2 = (1-2b+b^2) \circ b^2 = (a+b^2) \circ b^2.$$

Применяя второе свойство, окончательно получаем $a = a \circ 0$ для всех a.

Теперь из второго свойства следует, что $x \circ y = (x-y) \circ 0 = x-y$ для всех x, y. Проверка показывает, что для операции вычитания все три свойства из условия задачи действительно выполнены.

ОТВЕТ: Эта операция является вычитанием.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2009 — 2010 учебный год

11 класс

11.1. *Натуральное число называется* совершенным, *если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, кроме самого этого числа. (Например, число* 6 *совершенное, так как* $6 = 1 + 2 + 3$.*)*

Докажите, что:

а) число 2010 не является совершенным числом,

б) число 2010^2 *не является совершенным числом,*

в) число n^2 *не является совершенным числом ни для какого натурального* n.

РЕШЕНИЕ: Обозначим через $s(n)$ сумму всех делителей числа n, включая его самого. Легко видеть, что число n совершенное тогда и только тогда, когда $s(n) = 2n$.

Заметим, что если a и b взаимно просты, то $s(ab) = s(a)s(b)$. Действительно, если $s(a) = a_1 + \dots + a_k$, где a_i — всевозможные различные множители a, аналогично $s(b) = b_1 + \dots + b_l$, то для всех $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$ выполнено a_ib_j является делителем ab. Заметим, что любой делитель r может единственным образом быть представлен в виде $r = a_ib_j$ ($a_i =$ НОД(a, r), $b_j =$ НОД(b, r)), следовательно в сумме $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l} a_ib_j$ выражение r будет встречаться ровно один раз. Тогда $s(ab) = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l} a_ib_j = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \sum\limits_{j=1}^{l} b_j = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i(s(b)) = s(a) \cdot s(b)$.

а) Поскольку число 2010 можно представить в виде $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, то по доказанному имеем $s(2010) = s(2) \cdot s(3) \cdot s(5) \cdot s(67)$. Для простых p имеем $s(p) = p + 1$, отсюда $s(2010) = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 68$. Если бы 2010 было бы совершенным, то $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 68 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, но этого быть не может (левая часть не делится на 67)

б), в) При $n = 1$ все показано: 1 не является совершенным числом.

Рассмотрим квадрат произвольного натурального числа $n > 1$. Тогда он допускает разложение

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$$

для некоторых натуральных чисел $k, \alpha_1, \dots \alpha_k, p_1, \dots, p_k$, где числа p_i — простые.

Заметим что $p_1^{2\alpha_1}$ делится на числа $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^{2\alpha_1}$ и только на них, отсюда $s(p_1^{2\alpha_1}) = 1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{2\alpha_1}$. Но это число нечётное ($2\alpha_1$ слагаемых одной четности и 1). Аналогично показывается, что нечётны и все $s(p_i^{2\alpha_i})$.

Теперь, воспользовавшись показанным свойством, имеем $s(n^2) = s(p_1^{2\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot s(p_n^{2\alpha_n})$. Как произведение нечётных чисел, число $s(n^2)$ — нечётно. Но у совершенного числа m число $s(m)$ чётно. Противоречие.

11.2. *Найти все такие натуральные числа* k, *для каждого из которых выражение* $\sin kx \cdot \sin^k x - \cos kx \cdot \cos^k x + \cos^k 2x$ *не зависит от* x.

РЕШЕНИЕ:

Первый способ. Положим $f_k(x) = \sin kx \cdot \sin^k x - \cos kx \cdot \cos^k x + \cos^k 2x$. Выражение не зависит от x тогда и только тогда, когда $f_k(x) \equiv C$, где C — некоторая константа. Так как $f_k(0) = 0$ при любом натуральном k, то $C = 0$.

При $k = 1$ имеем: $f_k(x) = \sin^2 x - cos^2 x + \cos 2x \equiv 0$, т.е. $k = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $k \geqslant 2$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда рассмотрим $x_0 = \dfrac{\pi}{2k}$. Ясно, что $0 < x_0 \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, поэтому $\sin x_0 > 0$ и $\cos 2x_0 \geqslant 0$. Поэтому $f(x_0) = \sin\dfrac{\pi}{2} \cdot \sin^k x_0 - \cos\dfrac{\pi}{2} \cdot \cos^k x_0 + \cos^k 2x_0 = \sin^k x_0 + \cos^k 2x_0 > 0$. Поэтому k не удовлетворяет условию задачи.

Второй способ. Пусть $f(x) = \sin kx \cdot \sin^k x - \cos kx \cdot \cos^k x + \cos^k 2x$. При $k = 1$ имеем тождество $f(x) \equiv 0$. Пусть $k \geqslant 2$, $k \in \mathbf{N}$ и $f(x)$ не зависит от x. Из равенства $f(-x) = f(x)$, верного для всех $x \in \mathbf{R}$, следует, что $(-1)^{k+1} \sin kx \cdot \sin^k x - \cos kx \cdot \cos^k x + \cos^k 2x = \sin kx \cdot \sin^k x - \cos kx \cdot \cos^k x + \cos^k 2x$, откуда $(-1)^{k-1} = 1$, т.е., k — нечётно. Пусть $k = 2s + 1$, $s = 1, 2, \ldots$. Из равенства

$$0 = f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2s+1} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi s}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi s}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

следует, что s — чётно, $s = 2r$. Тогда $k = 4r + 1$. Далее

$$f'(x) = k(\cos kx \cdot \sin^k x + \cos x \cdot \sin^{k-1} x \cdot \sin kx +$$

$$+ \sin kx \cdot \cos^k x + \cos kx \cdot \cos^{k-1} x \cdot \sin x) - 2k \sin 2x \cdot \cos^{k-1} 2x,$$

откуда $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cdot k \cdot \left(\sin\dfrac{\pi k}{4} + \cos\dfrac{\pi k}{4}\right) = 0$, поскольку $f(x) = const$. Отсюда $k = 3 + 4s$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Противоречие.

ОТВЕТ: $k = 1$.

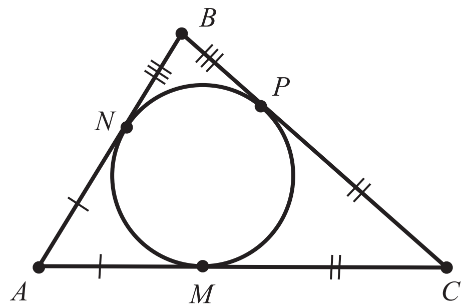
11.3. *Дан треугольник ABC. На лучах BA и CA вне треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 такие, что $AA_1 = AA_2 = BC$. Аналогичным образом получены точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 ($BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$). Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 принадлежат одной окружности (окружности Конвея).*

РЕШЕНИЕ: Первый способ. Докажем, что центр вписанной окружности (точка J) равноудалена от точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 C_2. Это будет означать, что J является центром окружности, проходящей через эти точки.

Треугольник AA_1A_2 равнобедренный по построению, поэтому серединный перпендикуляр к отрезку A_1A_2 является прямой, на которой лежит биссектриса угла A_1AA_2. Но углы A_1AA_2 и BAC вертикальные, поэтому их биссектрисы лежат на одной прямой. Так как центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, отсюда следует, что точка J равноудалена от точек A_1 и A_2. Это же верно для пар точек B_1, B_2 и C_1, C_2.

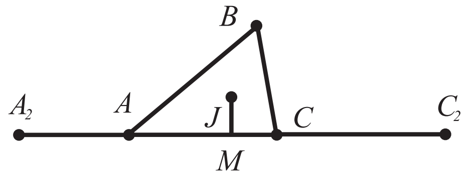
Остаётся показать, что $A_1J = B_1J = C_1J$. Докажем, например, что $A_1J = C_1J$. Так как $A_1C = A_1A + AC = BC + AC = BC + CC_1 = BC_1$, то треугольник

A_1BC_1 является равнобедренным. Его биссектриса, проведённая из вершины B, одновременно является его высотой и медианой, т.е. лежит на серединном перпендикуляре к стороне A_1C_1. Значит, любая точка биссектрисы (в частности, точка J) равноудалена от точек A_1 и C_1, что и требуется доказать.



Второй способ. Докажем лемму: пусть окружность, вписанная в треугольник ABC касается сторон $AC = b$, $AB = c$ и $BC = a$ в точках M, N и P соответственно. Тогда $AM = AN = \dfrac{b+c-a}{2}$, $BN = BP = \dfrac{a+c-b}{2}$ и $CM = CP = \dfrac{b+a-c}{2}$.

Доказательство леммы. $AM = AN$, как отрезки касательных проведённых в из точки A. Положим $AM = x$. Аналогично, пусть $BN = BP = y$ и $CP = CM = z$. Имеем систему $\begin{cases} x+y &= c \\ y+z &= a \\ z+x &= b \end{cases}$, решая которую и получаем требуемые равенства.



Доказательство утверждения задачи. Пусть r и J — соответственно радиус и центр вписанной в треугольник ABC окружности, M —- точка касания этой окружности со стороной AC (см. рисунок). Согласно лемме $AM = \dfrac{AB+AC-BC}{2}$. Найдём расстояние JA_1: $JA_1^2 = JM^2 + MA_1^2 = r^2+(MA+AA_1)^2 = r^2+\left(\dfrac{AB+AC-BC}{2}+BC\right)^2 = r^2+\left(\dfrac{AB+AC+BC}{2}\right)^2 = r^2+p^2$, т.е. $JA_1 = \sqrt{r^2+p^2}$, где p — полупериметр треугольника ABC. Этому же числу равны все расстояния JA_2, JB_1, JB_2, JC_1, JC_2, поэтому точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на окружности с центром в точке J радиуса $\sqrt{r^2+p^2}$.

11.4. *Найдите наименьшее значение величины $P = \max\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, где $p_1 = x_1+x_2+x_3$, $p_2 = x_2+x_3+x_4$, $p_3 = x_3+x_4+x_5$, $p_4 = x_4+x_5+x_6$, $p_5 = x_5+x_6+x_7$, если все $x_i \geqslant 0$ и $x_1+x_2+\ldots+x_7 = 1$.*

РЕШЕНИЕ:

Первый способ. Заметим, что максимум нескольких чисел всегда не меньше их среднего арифметического, тогда

$$P \geqslant \frac{x_1+2x_2+3x_3+3x_4+3x_5+2x_6+x_7}{5} = \frac{3-2x_1-2x_7-x_2-x_6}{5},$$

но $x_1 \leqslant x_1+x_2 \leqslant p_1 \leqslant P$ и $x_7 \leqslant x_6+x_7 \leqslant p_5 \leqslant P$, отсюда

$$P \geqslant \frac{3-2x_1-2x_7-x_2-x_6}{5} \geqslant \frac{3-4P}{5},$$

то есть $5P \geqslant 3 - 4P$, $9P \geqslant 3$, $P \geqslant 1/3$.

Значение $P = 1/3$ достигается при $x_1 = x_4 = x_7 = 1/3, x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$.

Второй способ. Рассмотрим три множества $\{x_1,\, x_2,\, x_3\}$, $\{x_4,\, x_5,\, x_6\}$, $\{x_7\}$. Если сумма чисел в каждом из них меньше $1/3$, то сумма всех чисел меньше 1 — противоречие с условием задачи. Итак, либо $p_1 \geqslant 1/3$, либо $p_4 \geqslant 1/3$, либо $p_5 \geqslant x_7 \geqslant 1/3$. Таким образом, хотя бы одно из чисел p_i не меньше $1/3$, поэтому $P \geqslant 1/3$.

Несложно привести пример, когда все числа p_i (а, следовательно, и число P) равны в точности $1/3$: $x_1 = x_4 = x_7 = 1/3$, $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$. Можно доказать, что такой набор чисел единственный.

ОТВЕТ: $1/3$.

11.5. *На множестве действительных чисел* $\mathbf{R}$ *введена операция* $x \circ y$ *такая, что для любых чисел* x, y, z *имеют место равенства:*

1) $x \circ y = y \circ x$,

2) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

3) $(cx) \circ (cy) = c(x \circ y)$ *для любого* $c > 0$,

4) выражение $(x + z) \circ (y + z) - (x \circ y)$ *зависит только от* z *и не зависит от* x *и* y.

Выразите эту операцию через четыре арифметических действия и операцию взятия модуля. Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

РЕШЕНИЕ: Заметим, что $0 \circ 0 = (0 \cdot 2) \circ (0 \cdot 2) = 2(0 \circ 0)$, то есть $0 \circ 0 = 0$.

Пусть $k = 0 \circ 1$, $l = 0 \circ (-1)$. Для всякого $c > 0$ имеем $0 \circ c = (0 \cdot 1) \circ (c \cdot 1) = (0 \cdot c) \circ (c \cdot 1) = c(0 \circ 1) = kc$. Тогда $0 \circ k = k^2$, но $0 \circ k = 0 \circ (0 \circ 1) = (0 \circ 0) \circ 1 = 0 \circ 1 = k$, отсюда $k^2 = k$, то есть $k = 0$ или $k = 1$.

Аналогично для всякого $c > 0$ имеем $0 \circ (-c) = (0 \cdot c) \circ (-1 \cdot c) = c(0 \circ (-1)) = lc$. Тогда $0 \circ (-l) = l^2$, но $0 \circ (-l) = 0 \circ (0 \circ (-1)) = (0 \circ 0) \circ (-1) = 0 \circ (-1) = l$, отсюда $l^2 = l$, то есть $l = 0$ или $l = 1$.

Обозначим $(x+z) \circ (y+z) - (x \circ y)$ через $f(z)$. Тогда $f(z) = (0+z) \circ (0+z) - (0 \circ 0) = z \circ z = z(1 \circ 1)$ для всех положительных z.

Теперь для всех $x > y$ выполнено $x \circ y = (x - y) \circ 0 + f(y) = (x - y)k + y(1 \circ 1)$ и $x \circ y = 0 \circ (y - x) + f(x) = (y - x)l + x(1 \circ 1)$. Отсюда $(y - x)(1 \circ 1) = (y - x)(k + l)$, в частности $1 \circ 1 = k + l$ и $x \circ y = (x - y)k + y(k + l) = kx + yl$ для всех $x > y$, то есть $x \circ y = k \max\{x, y\} + l \min\{x, y\}$.

Подставляя возможные значения k, l получаем четыре возможных варианта:

1) $x \circ y = x + y$,

2) $x \circ y = \max\{x, y\}$,

3) $x \circ y = \min\{x, y\}$,

4) $x \circ y = 0$.

Остаётся заметить, что $\max\{x, y\} = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ и $\min\{x, y\} = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.

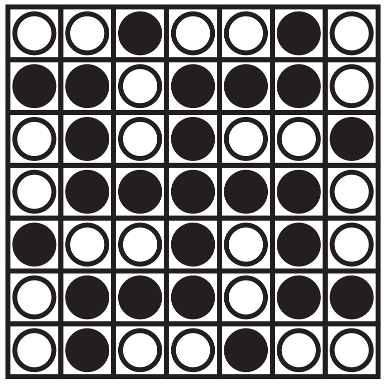
Проверка показывает, что все эти четыре варианта годятся.

ОТВЕТ: Введённая операция — либо тождественный ноль, либо сумма чисел, либо взятие наибольшего из двух чисел, либо взятие наименьшего из них.

11.6. *На доске* 7×7 *расставьте* 24 *рыцаря и* 25 *лжецов (по одному в единичную клетку) так, чтобы каждый из них мог сказать: «Рядом со мной стоит ровно один рыцарь». Как обычно, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Люди считаются стоящими рядом, если у занимаемых ими клеток есть общая сторона.*

РЕШЕНИЕ:

См. рисунок (рыцари обозначены белыми кругами, лжецы — чёрными).



Составители: Шевалдин В.Т., Нохрин С.Э., Хлопин Д.В.
http://acm.usu.ru