

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
2008 — 2009 УЧ. ГОД

6-й — 7-й КЛАСС

6 — 7.1. а) Существует ли трёхзначное число, все цифры которого одинаковы, но при написании его словами русского языка все эти слова начинаются с разных букв?

б) Существует ли трёхзначное число, все цифры которого различны, но при написании его словами русского языка все эти слова начинаются с одной и той же буквы?

6 — 7.2. (Из материалов Кишинёвской гимназии 1879 года.) Три мужа - Андрей, Иван и Степан пошли со своими жёнами - Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по столько рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван больше Екатерины на 11 вещей, а Степан меньше Ольги на 23 вещи. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал на 63 рубля больше, чем его собственная жена.

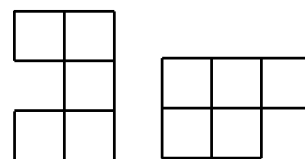
6 — 7.3. Расставьте числа в пустых клетках таблицы

			17			20			
--	--	--	----	--	--	----	--	--	--

так, чтобы сумма чисел в любых трёх соседних клетках была одинакова, а сумма всех двенадцати чисел равнялась 200.

6 — 7.4. В городской думе города N ровно 60% депутатов считают введение ЕГЭ полезной мерой, 30% — вредной, а оставшиеся 10% путают ЕГЭ с ГИБДД. Однако остальные взрослые жители города N (не являющиеся депутатами) имеют другое мнение: лишь 10% из них считают ЕГЭ полезным, 20% — вредным, а остальные 70% думают, что это явление временное. Сколько процентов всех взрослых жителей города считают ЕГЭ полезным, если вредным его считают ровно 20,01% из них?

6 — 7.5. Из клетчатой доски 6×6 вырезали произвольным образом 11 клеток. Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать хотя бы одну из двух указанных фигур. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать).



6 — 7.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “-”, “×”, “:”) так, чтобы

- 1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,
- 2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)

8-й КЛАСС

8.1. На шоу “Последний герой” островитяне случайно нашли склад операторов телевидения, где хранилось несколько бутылок газировки. Ночью участники шоу пришли на склад и выпили 10 бутылок, причём все пришедшие выпили поровну. Утром у некоторых островитян проснулась совесть, поэтому следующей ночью на склад пришли только семеро. Они допили оставшуюся газировку, причём каждому из них досталось напитка вдвое меньше, чем накануне. Сколько бутылок газировки было на складе до прихода неожиданных пришельцев?

8.2. Сократите дробь

$$\frac{x^2(y^3 - z^3) + y^2(z^3 - x^3) + z^2(x^3 - y^3)}{x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)}.$$

8.3. Пусть запись $a \square b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a + b$, а запись $a \diamond b$ — наименьшее из чисел $a + b$ и $2b$.

Решите уравнения:

а) $x \square 3 = 5 \square x$

б) $x \diamond 3 = 5 \diamond x$

в) $(x \diamond 1) \diamond 2 = 2 \square (1 \square x)$.

8.4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD угла C . На прямой AC взята точка E так, что $\angle EDC = 90^\circ$. Найти EC , если $AD = 1$.

8.5. Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил в уме их сумму на их произведение. После этого он стёр самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Вторым результатом оказался втрое больше первого. Какое число стёр Незнайка?

8.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “−”, “×”, “:”) так, чтобы

1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,

2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
2008 — 2009 УЧ. ГОД

9-й КЛАСС

9.1. Незнайка сказал, что если сложить все числа, которые могут получиться при вычёркивании любых 5 цифр семизначного номера его телефона, то получится 2009. Докажите, что Незнайка ошибся в вычислениях.

9.2. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно. Оказалось, что периметр треугольника CMK ровно в два раза меньше периметра квадрата. Найдите угол MAK .

9.3. Пусть a, b, c, d, A, B, C, D — положительные числа.

$$\alpha = \max \left(\frac{a+c}{A+C}, \frac{b+d}{B+D} \right), \quad \beta = \min \left(\frac{a+b}{A+B}, \frac{c+d}{C+D} \right).$$

Докажите неравенство $\alpha \geq \beta$.

9.4. Кот Матроскин как-то под Новый год разделил все действительные числа между собой и Шариком так, что

- 1) сумма любых двух чисел Матроскина — число Матроскина;
 - 2) сумма любых двух чисел Шарика — число Матроскина;
 - 3) сумма любых числа Шарика и числа Матроскина — число Шарика.
- Какие числа достались Шарiku?

9.5. Известно, что произвольное действительное число a однозначно представимо в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ — целое число (целая часть числа a), а $\{a\}$ — дробная часть числа a , $0 \leq \{a\} < 1$.

Про некоторое число x известно, что $\{32x\} = \{200x\}$, $\{2x\} = \{100x\}$. Докажите, что $\{x\} = \{155x\}$.

9.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “−”, “×”, “:”) так, чтобы

- 1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,
- 2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.)

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
2008 — 2009 УЧ. ГОД

10-й КЛАСС

10.1. Докажите, что если для действительных чисел a, b, c выполнены неравенства $a + b + c > 0$, $ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$, то все эти числа положительные.

10.2. Вычислите значение выражения

$$\min_{x \in [-1, 1]} \left(\max_{y \in [-1, 1]} \left(\min_{z \in [-1, 1]} |x + y + z| \right) \right).$$

10.3. Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники у которых зафиксирована вершина прямого угла, а сумма катетов является постоянной величиной (пусть для определённости она равна d). Найдите геометрическое место точек, каждая из которых является центром квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника вне его.

10.4. Юношей и девушек на балу было поровну. Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, либо с более умной, чем та, с которой он танцевал танго. А один юноша танцевал вальс с девушкой одновременно и более красивой и более умной. Могло ли такое быть?

10.5. Натуральное число назовем *своим*, если оно представимо в виде среднего арифметического квадратов рациональных чисел. Верно ли, что все натуральные числа свои? Решить задачу в предположении, что имеется ввиду среднее арифметическое

- а) в точности двух квадратов;
- б) нескольких (возможно, одного) квадратов.

10.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “−”, “×”, “:”) так, чтобы

- 1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,
- 2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
2008 — 2009 УЧ. ГОД

11-й КЛАСС

11.1. Пусть x, y, z - действительные числа и $A = \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$. Найти наибольшее значение числа A .

11.2. Для двух бесконечных в обе стороны, возрастающих арифметических прогрессий $A = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $B = \{b_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ будем писать, что $B \sqsubseteq A$, если сумма любых двух членов прогрессии B — элемент прогрессии A . Пусть известно, что $A \sqsubseteq B$, $B \sqsubseteq A$.

- а) Докажите, что разности этих прогрессий равны.
- б) Прогрессия A содержит число 2009. Укажите все действительные числа, которые не могут являться элементами B . Ответ обоснуйте.

11.3. Докажите для всех различных положительных чисел a, b неравенство:

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

11.4. Острый угол параллелограмма $ABCD$ равен 45° . На диагонали AC отмечена точка K , так что угол BKD равен 90° . Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению $AK \cdot KC$.

11.5. Почтальон Печкин поделил все действительные числа между котом Матроскиным и Шариком так, что

- 1) произведение любых двух чисел Матроскина — число Матроскина;
 - 2) произведение любых двух чисел Шарика — число Матроскина;
 - 3) произведение любых числа Шарика и числа Матроскина — число Шарика.
- Известно, что число $-\pi$ досталось Шарiku. Кому достались остальные числа?

11.6. Требуется записать в строчку (в каком-то порядке) три семёрки и одну единицу и расставить между ними скобки и знаки четырёх арифметических действий (“+”, “−”, “×”, “.”) так, чтобы

- 1) между любыми двумя цифрами стоял хотя бы один знак,
- 2) после вычисления получилось число 50.

Возможно ли это? Если ответ положительный, то укажите пример такой записи, если ответ отрицательный — приведите доказательство этого факта.

(Замечание. Записи вида $1^7 + 7 \cdot 7$, $7 \cdot \sqrt{7 \times 7} + 1$ и т.п. не разрешены, так как операции возведения в степень, извлечение корня и им подобные не относятся к четырём арифметическим действиям.).