ВУЗОВСКО—АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2007 — 2008 учебный год

6 — 7-й КЛАСС

6—7.1. Известно, что каждое из чисел $2x - y$, $2y - z$ и $2z - x$ положительно. Докажите, что все числа x, y, z положительны.

6—7.2. У Васи есть набор из четырёх палочек. Он сложил из них прямоугольник. Потом он попытался сложить из всех четырёх палочек треугольник, но оказалось, что это невозможно. Каким этот прямоугольник мог быть? Найдите все варианты, и объясните, почему других нет. Палочки ломать нельзя.

6—7.3. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори, и сумма лет Ани и Веры делится на 3?

6—7.4. Бревно длиной 15 метров распилено на 5 частей: 1, 2, 3, 4 и 5 метров (считая части слева направо). После этого в этих 5 частях сделали ещё несколько дополнительных распилов (не перекладывая куски). Оказалось, что после этих распилов каждый получившийся кусочек длиннее своего правого соседа. Какое наименьшее количество кусочков могло получиться из всего бревна?

6—7.5. Двое друзей, Иван и Николай, живут в одной деревне, недалеко друг от друга. Дома у каждого из них есть настенные часы. Однажды Иван забыл завести свои часы, и они остановились. "Пойду-ка я в гости к Николаю, заодно и посмотрю, который час"; — решил Иван. Отправившись в гости, и просидев у Николая некоторое время, Иван вернулся домой и верно поставил свои часы. Объясните, как он сумел это сделать.

ВУЗОВСКО—АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2007 — 2008 учебный год

8-й КЛАСС

8.1. Каково множество значений, которое может принимать сумма

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz=1$?

8.2. Существуют ли попарно различные действительные числа a, b и c такие, что $a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)$?

8.3. Барон Мюнхгаузен придумал простой способ, как с помощью циркуля и линейки в любой точке A нарисованной на плоскости прямой восстановить к ней перпендикуляр. По его мнению, вначале нужно построить любой равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, лежащим на данной прямой. Затем на стороне BA надо отложить любой отрезок BN не очень большой длины (меньшей, чем половина AB), а на стороне CB — отрезок CM длины вдвое большей, чем BN. Далее надо через точки M и N провести прямую, и на ней отложить отрезок $NK=MN$. Барон утверждает, что прямая AK и будет искомым перпендикуляром. Не заврался ли барон?

8.4. Новая шахматная фигура "муравей"может за один ход передвинуться на одно поле: по вертикали или по горизонтали (но не по диагонали). Кроме того, муравей не может сделать ход на то поле, с которого он только что пришел. Докажите, что шахматную доску 8×8 можно без наложений замостить 32-мя "доминошками" (т.е. прямоугольниками размера 1×2 клетки) так, что при любом замкнутом (не обязательно проходящем через все поля шахматной доски) маршруте муравья (т.е. маршруте, первое поле которого совпадает с последним), хотя бы одна "доминошка" будет пройдена целиком (т.е. муравей побывает на обоих полях, покрываемых "доминошкой").

8.5. Можно ли записать числа 1, 2, 3, $\ldots$, 16 в строку в некотором порядке так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел делилась без остатка на 3? Ответ обосновать.

ВУЗОВСКО—АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2007 — 2008 учебный год

9-й КЛАСС

9.1. Пусть a, b — неотрицательные числа. Докажите неравенство

$$(a+b)(1+\sqrt{ab}) \geqslant 2\sqrt{ab(1+a)(1+b)}.$$

9.2. Сколько существует таких групп из девяти последовательных натуральных четырёхзначных чисел n, $n+1$, …, $n+8$, что число n делится без остатка на 10, $n+1$ — на 9, $n+2$ — на 8, …, $n+8$ — на 2? Ответ обосновать.

9.3. а) Алиса расставила 10 каких-то натуральных чисел (не обязательно последовательных) по кругу. Чеширский Кот посмотрел на эти числа и заметил, что как бы он не разделил круг на две половинки (по 5 чисел в каждой), ровно в одной половинке произведение находящихся там чисел будет делиться на 2. Сколько чётных могло быть среди написанных Алисой? Ответ обосновать.

б) На следующий день Алиса расставила по кругу уже 100 каких-то натуральных чисел. Теперь Чеширский Кот обнаружил, что при любом разделе круга на две половины, ровно в одной из них произведение находящихся там чисел делится на 8. Сколько чётных чисел могло быть среди написанных Алисой на этот раз? Ответ обосновать.

9.4. На стороне ромба произвольным образом выбрали точку, и соединили её отрезками с противоположными вершинами ромба, разбив тем самым ромб на три треугольника. Докажите, что вписанные в эти треугольники три окружности имеют общую касательную.

9.5. На плоскости отмечена точка T. Андрей и Борис играют в следующую игру. Они ходят по очереди (первый начинает Андрей). За один ход разрешается провести на этой плоскости через точку T прямую, не совпадающую с уже проведёнными. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-либо двумя из уже проведённых прямых окажется меньше 1°. Кто выиграет при правильной игре — Андрей или Борис, и как должен играть победитель, чтобы добиться победы независимо от игры соперника?

ВУЗОВСКО—АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2007 — 2008 учебный год

10-й КЛАСС

10.1. а) Приведите пример определённой на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ функции $f(x)$, для которой при всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено равенство $f(f(x)) = 2007x + 2008$.

б) Приведите пример определённой на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ функции $f(x)$, для которой при всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено равенство $\underbrace{f(f(f \dots f(x)))}_{100 \text{ раз}} = 2007x + 2008$.

10.2. а) Пусть положительные числа a, b, p, q удовлетворяют равенствам $p+q = 1$ и $\dfrac{p}{a} + \dfrac{q}{b} = \dfrac{1}{pa + qb}$. Докажите, что тогда $a = b$.

б) Пусть положительные числа a, b, c, p, q, r удовлетворяют равенствам $p + q + r = 1$ и $\dfrac{p}{a} + \dfrac{q}{b} + \dfrac{r}{c} = \dfrac{1}{pa + qb + rc}$. Докажите, что тогда $a = b = c$.

10.3. Постройте (с помощью циркуля и линейки) в треугольнике ABC все точки Q такие, что $\angle CAQ \leqslant \angle BAQ$, $\angle ABQ \leqslant \angle CBQ$ и $\angle BCQ \leqslant \angle ACQ$. Ответ обосновать.

10.4. Диме и Серёже в Новый Год подарили на двоих одну конфету длиной 9 метров, а главный для них сюрприз спрятали где-то внутри. Дима и Серёжа договорились, что они будут кушать конфету по очереди (первый Дима), каждый раз по одной третьей части от её текущей длины, но Дима будет есть слева, а Серёжа — справа. Уже давно прошло лето, а Дима и Серёжа до сих пор кушают конфету, но главный сюрприз им никак не попадается. В каком месте конфеты он находился изначально? Ответ обосновать.

10.5. В строку записали 23 произвольных целых числа (не обязательно последовательных). Доказать, что между ними можно так расставить знаки сложения, умножения и скобок, чтобы получившееся выражение делилось на 2000 без остатка. Другие операции, знаки и числа использовать нельзя.

ВУЗОВСКО–АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2007 — 2008 учебный год

11-й КЛАСС

11.1. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, непрерывная и монотонная в некотором интервале. Пусть $g(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, т.е. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Обозначим через $G(x)$ функцию, обратную к $F(x) = mf(kx + b) + a$ (здесь m, k, b, a — некоторые константы). Выразить $G(x)$ через $g(x)$.

11.2. На доске записано выражение

$$a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \cos 4x + \ldots + a_{2006} \cos 2006x + a_{2007} \sin 2007x.$$

Двое игроков играют в следующую игру: они по очереди произвольным образом подставляют вместо коэффициентов a_i действительные числа. После того, как будет сделано 2007 ходов, на доске образуется некоторая функция $f(x)$. (Такая функция называется *тригонометрическим полиномом).* Начинающий выигрывает, если эта функция имеет корень на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и проигрывает в противном случае. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш, и как ему следует для этого играть?

11.3. 1000 радиусов разделили круг на 1000 равных секторов: 500 синих и 500 красных. В синие секторы, начиная с некоторого, против движения часовой стрелки записали последовательно (по одному числу в сектор) все натуральные числа от 1 до 500 включительно. В красные секторы, начиная с какого-то, записали также последовательно (по одному числу в сектор) эти же числа, но уже по часовой стрелке. Докажите, что существует полукруг, в котором записаны все натуральные числа от 1 до 500, если а) цвета секторов чередуются, б) цвета секторов расположены в произвольном порядке.

11.4 В треугольник, длины всех сторон которого измеряются целыми числами, вписан круг радиуса 1. Достаточно ли этой информации, чтобы однозначно восстановить длины всех сторон треугольника? Ответ обосновать.

11.5. Доказать теорему Лагерра. Известно, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три различных действительных корня. Докажите, что все они расположены на интервале с концами $\dfrac{-a \pm 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}$.