ВУЗОВСКО—АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2007 — 2008 учебный год

Решения задач
6 — 7-й КЛАСС

6—7.1. *Известно, что каждое из чисел* $2x - y$, $2y - z$ *и* $2z - x$ *положительно. Докажите, что все числа* x, y, z *положительны.*

Решение: Предположим противное, т.е., пусть среди чисел x, y и z есть неположительные. Пусть $x \leqslant 0$ (остальные два случая аналогичны). Тогда (так как число $2x - y$ положительно), число y отрицательно. Далее из положительности числа $2y - z$ следует, что $z < 0$. Но тогда $x + y + z < 0$. С другой стороны, $x + y + z = (2x - y) + (2y - z) + (2z - x) > 0$. Противоречие.

6—7.2. *У Васи есть набор из четырёх палочек. Он сложил из них прямоугольник. Потом он попытался сложить из всех четырёх палочек треугольник, но оказалось, что это невозможно. Каким этот прямоугольник мог быть? Найдите все варианты, и объясните, почему других нет. Палочки ломать нельзя.*

Решение: Заметим, что если длины всех палочек равны (т.е. если прямоугольник являлся квадратом), то треугольник составить нельзя: одна из сторон треугольника должна состоять из двух палочек, и тогда её длина равна сумме двух других сторон — противоречие с неравенством треугольника.

Пусть не все длины палочек одинаковы. Так как из палочек был сложен прямоугольник, то эти длины палочек в каждой из пар, образующих его противоположные стороны равны. Пусть эти длины равны a и b, и пусть $a < b$. Тогда $2a < b + b$, и из палочек составляется треугольник со сторонами $2a$, b и b, что противоречит условию.

Ответ: Прямоугольник был квадратом.

6—7.3. *В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори, и сумма лет Ани и Веры делится на 3?*

Решение: Из первых двух предложений, следует, что Боре либо 8, либо 13 лет. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1) Если Боре 13 лет, то Ане будет 15 лет, так как Аня старше Бори. Поэтому Вере может быть либо 5 лет, либо 8. Но в обоих случаях сумма лет Ани и Веры на 3 не делится, что противоречит условию задачи.

2) Пусть Боре 8 лет. Тогда Ане либо 13, либо 15 лет, так как она старше Бори. Но Ане не может быть 15 лет, так как в этом случае возраст Вари по условию задачи должен делиться на 3, но числа 5 и 13 на 3 не делятся. Итак, Ане 13 лет. Поэтому Вере 5 лет, а Гале — 15.

Ответ: Вере — 5 лет, Боре — 8 лет, Ане — 13 лет, Гале — 15 лет.

6—7.4. *Бревно длиной* 15 *метров распилено на* 5 *частей:* 1, 2, 3, 4 *и* 5 *метров (считая части слева направо). После этого в этих* 5 *частях сделали ещё несколько дополнительных распилов (не перекладывая куски). Оказалось, что после этих* *распилов каждый получившийся кусочек длиннее своего правого соседа. Какое наименьшее количество кусочков могло получиться из всего бревна?*

Решение: При распиле первого (слева) бревна все брёвнышки по длине не больше 1 (неважно был этот распил, или не был), значит каждое брёвнышко, получившееся из куска длины 2, по длине меньше 1. Тогда их не меньше трех, а длина самого правого из них меньше 2/3.

Рассмотрим бревно длины 3, его распилили на брёвнышки длины меньше 2/3, значит их было не меньше 3 /(2/3), то есть хотя бы 5. Итак самое правое из этих брёвнышек по длине меньше чем 3/5

Рассмотрим бревно длины 4. Его разрезали на брёвнышки длины меньше 3/5, тогда его распилили не меньше чем на 20/3 брёвнышек, то есть хотя бы на 7. Аналогично бревно длины 5 распилят не меньше чем на 9 брёвнышек. Общее число брёвнышек будет не меньше чем 1+3+5+7+9=25.

Приведём пример, показывающий, что 25 брёвнышек получиться действительно может.

$$1;\ \frac{2}{3}+0,01;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}-0,01;\quad \frac{3}{5}+0,02;\ \frac{3}{5}+0,01;\quad \frac{3}{5};\ \frac{3}{5}-0,01;\quad \frac{3}{5}-0,02;$$

$$\frac{4}{7}+0,003;\frac{4}{7}+0,002;\frac{4}{7}+0,001;\frac{4}{7};\frac{4}{7}-0,001;\frac{4}{7}-0,002;\frac{4}{7}-0,003;$$

$$\frac{5}{9}+0,004;\ \ldots\frac{5}{9};\ \frac{5}{9}-0,004.$$

Замечание. Можно доказать (например, по индукции), что если изначально имелось n брёвен размера 1, 2, ..., n, то наименьшее число кусков, на которые их можно распилить с выполнением условия задачи, равно n^2.

Ответ: 25 брёвнышек.

6—7.5. *Двое друзей, Иван и Николай, живут в одной деревне, недалеко друг от друга. Дома у каждого из них есть настенные часы. Однажды Иван забыл завести свои часы, и они остановились. "Пойду-ка я в гости к Николаю, заодно и посмотрю, который час" , — решил Иван. Отправившись в гости, и просидев у Николая некоторое время, Иван вернулся домой и верно поставил свои часы. Объясните, как он сумел это сделать.*

Решение: Иван перед уходом в гости завёл часы и заметил время, которое они показывали. Пусть это время x. Также пусть y и z — время прихода в гости и ухода из гостей соответственно, а t — время, которое показали часы Ивана на момент его возвращения. Тогда время, затраченное Иваном на путь в гости (в одну сторону), равно $((t-x)-(z-y))/2$, и, значит, точное время прихода домой равно $z+\dfrac{(t-x)-(z-y)}{2}=\dfrac{t-x+z+y}{2}$.

8-й КЛАСС

8.1. *Каково множество значений, которое может принимать сумма*

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz=1$?

Решение: Так как $z=\dfrac{1}{xy}$, то $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}=$
$=\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+y\cdot\dfrac{1}{xy}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xy}+x\cdot\dfrac{1}{xy}}=\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{x}{x+xy+1}+\dfrac{xy}{xy+1+x}=$
$=\dfrac{1+x+xy}{1+x+xy}=1.$

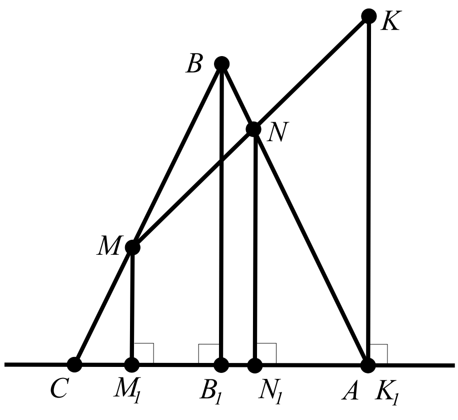
Ответ: Одно значение, равное 1.

8.2. *Существуют ли попарно различные действительные числа a, b и c такие, что $a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)$?*

Решение: Пусть выполнены равенства, указанные в условии. Заметим, что если при этом одна из переменных (скажем, a) равна 0, то нулю равна и ещё хотя бы одна переменная; в этом случае числа a, b и c не попарно различны. Пусть все переменные отличны от нуля. Из равенства $a(b-c)=b(c-a)$ находим, что $c=\dfrac{2ab}{a+b}$, а из равенства $b(c-a)=c(a-b$ получаем, что $b=\dfrac{2ac}{a+c}$. Отсюда $b=\dfrac{2a\frac{2ab}{a+b}}{a+\frac{2ab}{a+b}}=\dfrac{4ab}{a+3b}$, откуда получаем, что $a=b$ и снова попарной различности нет.

Ответ: Нет, таких чисел не существует.

8.3. *Барон Мюнхгаузен придумал простой способ, как с помощью циркуля и линейки в любой точке A нарисованной на плоскости прямой восстановить к ней перпендикуляр. По его мнению, вначале нужно построить любой равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, лежащим на данной прямой. Затем на стороне BA надо отложить любой отрезок BN не очень большой длины (меньшей, чем половина AB), а на стороне CB — отрезок CM длины вдвое большей, чем BN. Далее надо через точки M и N провести прямую, и на ней отложить отрезок $NK=MN$. Барон утверждает, что прямая AK и будет искомым перпендикуляром. Не заврался ли барон?*



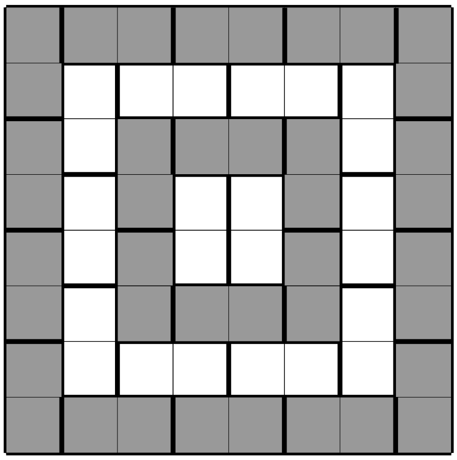
К решению задачи 8.3.

Решение: Покажем, что утверждение барона справедливо. Опустим на прямую AC перпендикуляры KK_1,MM_1, NN_1 и BB_1 из точек K, M, N и B соответственно, и пусть $AC = a$ и $B_1N_1 = x$ (см. рисунок). Требуется доказать, что точки A и K_1 совпадают, для чего достаточно проверить равенство $B_1K_1 = a/2$. По теореме Фалеса $CM_1 = 2B_1N_1 = 2x$ и $M_1N_1 = N_1K_1$. Тогда $B_1K_1 = x + N_1K_1 = x + M_1N_1 = x + M_1B_1 + B_1N_1 = x + \frac{a}{2} - 2x + x = \frac{a}{2}$, что и требовалось доказать.

Ответ: Барон абсолютно прав.

8.4. *Новая шахматная фигура "муравей"может за один ход передвинуться на одно поле: по вертикали или по горизонтали (но не по диагонали). Кроме того, муравей не может сделать ход на то поле, с которого он только что пришел. Докажите, что шахматную доску 8×8 можно без наложений замостить 32-мя "доминошками" (т.е. прямоугольниками размера 1×2 клетки) так, что при любом замкнутом (не обязательно проходящем через все поля шахматной доски) маршруте муравья (т.е. маршруте, первое поле которого совпадает с последним), хотя бы одна "доминошка" будет пройдена целиком (т.е. муравей побывает на обоих полях, покрываемых "доминошкой").*

Решение: Необходимое замощение состоит из 4 вложенных друг друга рамок. Каждая рамка выложена домино отдельно (см. рисунок). Рассмотрим произвольный замкнутый маршрут муравья. Он проходит через одну или несколько рамок, рассмотрим самую внешнюю рамку. Маршрут имеет на этой рамке не меньше двух клеток подряд, если таких клеток три или больше, то, по построению замощения, это пересечение содержит и целое домино. Таким образом можно считать, что пересечение состоит из кусков в точности по две клетки подряд. Рассмотрим один из таких кусков. Если этот кусок не целое домино, то, поскольку этот кусок в самой внешней рамке, маршрут должен содержать две соседние с ними клетки из соседней изнутри рамки, но по построению эти две клетки образуют домино.



К решению задачи 8.4.

Итак, любой замкнутый маршрут содержит минимум одно целое домино.

8.5. *Можно ли записать числа* $1, 2, 3, \ldots, 16$ *в строку в некотором порядке так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел делилась без остатка на 3? Ответ обосновать.*

Решение: Способ первый. Предположим, что записать числа требуемым образом удалось. Тогда сумма первых четырёх делится на 3, сумма следующих четырёх (т.е. стоящих на местах с 5 по 8) чисел делится на 3, следующих четырёх — тоже, и то же можно сказать о сумме четырёх последних чисел. Но тогда сумма всех чисел делится на 3, в то время, как она равна $1 + 2 + \ldots + 16 = 136$ — противоречие.

Способ второй. Будем рассматривать только остатки от деления чисел на 3. Пусть эти остатки выписаны в последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$. Если любые четыре последовательные числа в сумме делятся на 3, то на три делятся суммы $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} +$

$+a_{i+3}$ и $a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}$ (здесь $1 \leqslant i \leqslant 12$). Тогда их разность, равная $a_{i+4}-a_i$ также делится на 3, поэтому $a_i = a_{i+4}$. Отсюда $a_1 = a_5 = a_9 = a_{13}$, $a_2 = a_6 = a_{10} = a_{14}$, $a_3 = a_7 = a_{11} = a_{15}$ и $a_4 = a_8 = a_{12} = a_{16}$. Так как в каждой из групп ровно 4 числа, то количество единиц (а равно и любых других цифр в последовательности $\{a_i\}$) должно делиться на 4. Но всего среди чисел a_i имеется 5 нулей, 6 единиц и 5 двоек. Противоречие.

Ответ: Нет, нельзя.

9-й КЛАСС

9.1. *Пусть a, b — неотрицательные числа. Докажите неравенство*

$$(a+b)(1+\sqrt{ab}) \geqslant 2\sqrt{ab(1+a)(1+b)}.$$

Решение: Имеем $(a+b)(1+\sqrt{ab}) = a+b+(a+b)\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{ab}+(a+b)\sqrt{ab} = \sqrt{ab}(1+a+1+b) \geqslant 2\sqrt{ab(1+a)(1+b)}$. Здесь мы дважды воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

9.2. *Сколько существует таких групп из девяти последовательных натуральных четырёхзначных чисел n, $n+1$, …, $n+8$, что число n делится без остатка на 10, $n+1$ — на 9, $n+2$ — на 8, …, $n+8$ — на 2? Ответ обосновать.*

Решение: Так как все числа из группы четырёхзначные, то $1000 \leqslant n \leqslant 9991$. Заметим, что число $n+10$ делится на все натуральные числа от 1 до 10, поэтому оно делится и на число k — наименьшее общее кратное всех этих чисел. Наоборот, если $n+10$ делится на k, то число n обладает требуемым свойством. Число k, очевидно, равно $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$, откуда $n+10 = 2520m$, где m — натуральное число. Из неравенства $1000 \leqslant 2520m - 10 \leqslant 9991$ находим, что $n \in \{1, 2, 3\}$. Получаем три возможные группы, начинающиеся соответственно с чисел 2510, 5030 и 7550.

Ответ: Три группы.

9.3. *а) Алиса расставила 10 натуральных чисел по кругу. Чеширский Кот посмотрел на эти числа и заметил, что как ни разделить круг на две половинки (по 5 чисел в каждой), ровно в одной половинке произведение находящихся там чисел будет делиться на 2. Сколько чётных могло быть среди написанных Алисой? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.*

б) На следующий день Алиса расставила по кругу 100 каких-то натуральных чисел. Теперь Чеширский Кот обнаружил, что при любом разделе круга на две половины, ровно в одной из них произведение находящихся там чисел делится на 8. Сколько чётных чисел могло быть среди написанных Алисой на этот раз? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

Решение: Отметим, что все числа нечётными быть не могут, поэтому там есть хотя бы одно чётное число

а) Если на круге только одно чётное число, то оно всегда попадает только в один полукруг, и только в нём произведение будет чётным.

Если на круге есть хотя бы два чётных числа, то можно разделить круг на два полукруга так, чтобы в каждом полукруге было хотя бы одно чётное число, тогда произведение чисел в каждом окажется чётных, что противоречит условию. Итак чётных чисел в круге в точности одно.

б) Одно, два или три чётных числа может быть если, например, в точности одно из них равно 8, а остальные равны 2. Четыре чётных числа могут быть если, например, в круге стоят подряд 2,4,2,2, а других чётных чисел нет. В каждом из этих примеров произведение чисел на 8 делится в точности в одном полукруге - содержащем 8 или 4 соответственно.

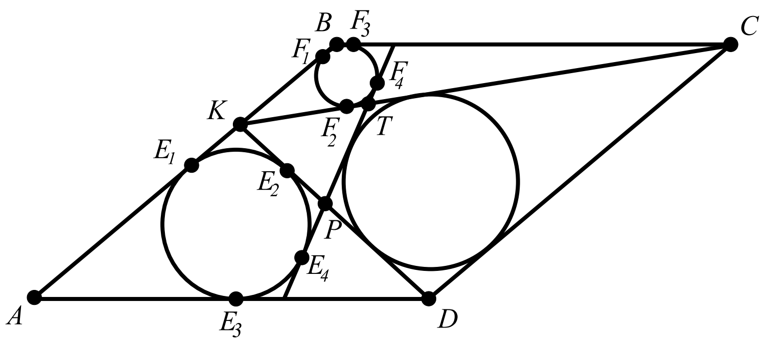
Пять чётных чисел могут быть, если все чётные числа в круге – это пять двоек. Тогда при любом разделе в одном из полукругов есть минимум три двойки, следовательно произведение делится на 8.

Предположим, что на круге стоят хотя бы 6 чётных чисел. Заметим, что при каждом повороте полукруга на одно число, количество чётных чисел в нём не может измениться больше чем на одно. Разделим круг на два полукруга. Если в каждом из них не меньше трех чётных чисел, то оба произведения делится на 8, чего быть не может, таким образом в одном из полукругов не более двух чётных чисел. Начнём его поворачивать (по одному числу), тогда через 50 поворотов число чётных чисел в нём станет больше трех. Поскольку число чётных при каждом повороте могло измениться не больше чем на 1, то при одном из поворотов в одном из полукругов число чётных равнялось трём, однако это противоречит условию.

Ответ: а) 1 б) от 1 до 5.

9.4. *На стороне ромба произвольным образом выбрали точку, и соединили её отрезками с противоположными вершинами ромба, разбив тем самым ромб на три треугольника. Докажите, что вписанные в эти треугольники три окружности имеют общую касательную.*

Решение: Пусть на стороне $AB = a$ ромба $ABCD$ выбрана точка K, окружность, вписанная в треугольник AKD, касается его сторон AK, KD и DA в точках E_1, E_2 и E_3 соответственно, а окружность, вписанная в треугольник BKC, касается сторон BK, KC и CB соответственно в точках F_1, F_2 и F_3 — см. рисунок. Пусть вторая общая касательная этих окружностей касается их в точках E_4 и F_4, и пересекает отрезки DK и KC в точках P и T. Нам достаточно показать, что четырёхугольник $CTPD$ — описанный, т.е., что $CT + PD = CD + PT$. Применим несколько раз теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из точки к одной и той же окружности и один раз теорему о том, что отрезки общих касательных к двум окружностям, ограниченные точками касания, равны. Получим: $CT + PD = CF_2 - F_2T + DE_2 - E_2P = CF_3 - F_4T + DE_3 - E_4P = CB - BF_3 - (F_4T + E_4P) + DA - AE_3 = a - BF_1 + a - AE_1 - (F_4E_4 - PT) = 2a - (BF_1 + AE_1) + PT - F_4E_4 = 2a - AB + F_1E_1 + PT - F_4E_4 = a + PT + (F_1E_1 - F_4E_4) = a + PT = CD + PT$, что и требовалось доказать.



К решению задачи 9.4.

9.5. *На плоскости отмечена точка T. Андрей и Борис играют в следующую игру. Они ходят по очереди (первый начинает Андрей). За один ход разрешается провести на этой плоскости через точку T прямую, не совпадающую с уже проведёнными. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-либо двумя* *из уже проведённых прямых окажется меньше* 1°. *Кто выиграет при правильной игре — Андрей или Борис, и как должен играть победитель, чтобы добиться победы независимо от игры соперника.*

Решение: Для любой прямой l, проходящей через точку T, обозначим через $l^\perp$ прямую, также проходящую через T и перпендикулярную l. Одна из выигрышных стратегий Бориса: если Андрей провёл очередным своим ходом прямую l, то Борис проводит прямую $l^\perp$. Действительно, во-первых, эта стратегия осуществима (все прямые, проходящие через T, разбиты на пары, и каждым ходом Андрей проводит прямую из ещё не задействованной пары. Во-вторых, Борис не может проиграть, играя указанным образом: если он провёл некоторую прямую l, и угол между ней и некоторой проведённой прямой m меньше 1°, то также меньше1° равный ему угол между уже проведёнными прямыми $l^\perp$ и $m^\perp$, т.е. игра должна была закончиться раньше. Наконец, игра не может завершиться вничью, так как после того, как будет проведена 181 прямая, угол между какими-то двумя (в силу принципа Дирихле) будет меньше 1°.

Замечание: Стратегия не единственна. Годится, например, такая модификация: первым ходом Борис проводит прямую m перпендикулярно проведённой Андреем, а далее на каждую проведённую Андреем прямую отвечает прямой, симметричной относительно m. Доказательство не меняется.

Ответ: Выигрывает Борис; одна из его выигрышных стратегий приведена в решении.

10-й КЛАСС

10.1. *а) Приведите пример определённой на всей числовой прямой* $\mathbf{R}$ *функции* $f(x)$*, для которой при всех* $x \in \mathbf{R}$ *выполнено равенство* $f(f(x)) = 2007x + 2008$.

б) Приведите пример определённой на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ *функции* $f(x)$*, для которой при всех* $x \in \mathbf{R}$ *выполнено равенство* $\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{100\ \textit{раз}} = 2007x + 2008$.

Решение: а) Будем искать $f(x)$ в виде $ax+b$. Тогда $f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b)+b = a^2x+(a+1)b$. Значит, a и b находятся из условий $a^2 = 2007$, $(a+1)b = 2008$. Подойдёт, например, функция $f(x) = \sqrt{2007}x + \dfrac{2008}{\sqrt{2007}+1}$.

б) Будем искать $f(x)$ в том же виде. Тогда $f(f(f(x))) = a(a^2x+(a+1)b)+b = a^3x+(a^2+a+1)b$, $f(f(f(f(x)))) = a(a^3x+(a^2b+a+1)b)+b = a^4x+(a^3+a^2+a+1)b$ и вообще, для любого натурального n $\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{n\ \text{раз}} = a^nx+(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)b$. (Строгое доказательство требует индукции.) Из равенства $a^{100}x + (a^{99}+a^{98}+\ldots+a+1)b = 2007x+2008$ находим, что $a = \sqrt[100]{2007}$, $b = \dfrac{2008}{1+\sqrt[100]{2007}+\sqrt[100]{2007^2}+\ldots+\sqrt[100]{2007^{99}}}$.

Ответ: а) $f(x) = \sqrt{2007}x + \dfrac{2008}{\sqrt{2007}+1}$ или $f(x) = -\sqrt{2007}x - \dfrac{2008}{\sqrt{2007}-1}$;

б) $f(x) == \sqrt[100]{2007}x + \dfrac{2008\,(\sqrt[100]{2007}-1)}{2006}$ или $f(x) = \sqrt[100]{2007}(1-x)+1$.

Замечание. Конечно, есть и другие способы решения, приводящие к другим ответам.

10.2. *а) Пусть положительные числа* a, b, p, q *удовлетворяют равенствам* $p+q=1$ *и* $\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b} = \dfrac{1}{pa+qb}$. *Докажите, что тогда* $a=b$.

б) Пусть положительные числа a, b, c, p, q, r *удовлетворяют равенствам* $p+q+r=1$ *и* $\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b}+\dfrac{r}{c} = \dfrac{1}{pa+qb+rc}$. *Докажите, что тогда* $a=b=c$.

Решение: а) Из равенства $\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b} = \dfrac{1}{pa+qb}$ выводим, что $p^2+pq\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+q^2 = 1$. Обозначим левую часть равенства через S. Поскольку $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geqslant 2$, то $S \geqslant (p+q)^2 = 1$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} = 2$, т.е. при $a=b$.

б) Из равенства $\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b}+\dfrac{r}{c} = \dfrac{1}{pa+qb+rc}$ выводим, что $p^2+q^2+r^2+pq\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+$ $+pr\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+qr\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right) = 1$. Обозначим левую часть равенства через S. Поскольку $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geqslant 2$, $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 2$, $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b} \geqslant 2$, то $S \geqslant p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = (p+q+r)^2 = 1$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} = 2$, $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} = 2$ и $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b} = 2$,т.е. при $a=b=c$.

10.3. *Постройте (с помощью циркуля и линейки) в треугольнике ABC все точки Q такие, что $\angle CAQ \leqslant \angle BAQ$, $\angle ABQ \leqslant \angle CBQ$ и $\angle BCQ \leqslant \angle ACQ$. Ответ обосновать.*

Решение: Такая точка единственна: центр вписанного круга. Докажем это. Пусть точка Q удовлетворяет всем условиям задачи. Обозначим через d_{AB}, d_{AC} и d_{BC} расстояние от Q до прямых AB, AC и BC соответственно. По свойству биссектрисы угла $\angle CAQ \leqslant \angle BAQ \Leftrightarrow d_{AC} \leqslant d_{AB}$. Аналогично, $\angle ABQ \leqslant \angle CBQ \Leftrightarrow d_{AB} \leqslant d_{BC}$ и $\angle BCQ \leqslant \angle ACQ \Leftrightarrow d_{BC} \leqslant d_{AC}$. Имеем $d_{AC} \leqslant d_{AB} \leqslant d_{BC} \leqslant d_{AC}$. Если хоть одно из неравенств строгое, приходим к противоречию. Поэтому все расстояния от точки Q до сторон треугольника равны. Но тогда Q лежит на биссектрисах внутренних углов, и стало быть, является центром вписанной окружности.

Построение точки трудностей не вызывает.

Ответ: Единственная точка — центр вписанной окружности.

10.4. *Диме и Серёже в Новый Год подарили на двоих одну конфету длиной* 9 *метров, а главный для них сюрприз спрятали где-то внутри. Дима и Серёжа договорились, что они будут кушать конфету по очереди (первый Дима), каждый раз по одной третьей части от её текущей длины, но Дима будет есть слева, а Серёжа — справа. Уже давно прошло лето, а Дима и Серёжа до сих пор кушают конфету, но главный сюрприз им никак не попадается. В каком месте конфеты он находился изначально? Ответ обосновать.*

Решение: Пусть сюрприз находился в точке A на расстоянии x метров от левого конца конфеты (и соответственно, на расстоянии $9 - x$ от её правого конца). После того, как Дима скушал треть конфеты, сюрприз стал располагаться на расстоянии $x - 3$ от левого конца (а расстояние до правого конца не изменилось). Заметим, что если выполнено условие $\dfrac{x}{9-x} = \dfrac{9-x}{x-3}$ (т.е. $x = 27/5$), то сюрприз мальчикам не попадётся никогда: после каждого "откушивания" сюрприз будет делить оставшуюся часть в одном и том же отношении (равном 3:2). Пусть сюрприз находится в другом месте, скажем, отстоящем на расстояние $t > 0$ от точки A. Так как длина конфеты уменьшается после каждого "откушивания" в 2/3 раза, последовательность длин оставшейся части образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $(9, 6, 4, 8/3, \ldots)$, и, значит, когда-нибудь станет меньше, чем t. При этом точка A будет лежать в несъеденной части конфеты, как уже было доказано. Это означает, что к этому моменту времени сюрприз одному из мальчиков уже попадётся.

Ответ: Сюрприз делит конфету в отношении 3:2, считая от левого её конца.

10.5. *В строку записали* 23 *произвольных целых числа (не обязательно последовательных). Доказать, что между ними можно так расставить знаки сложения, умножения и скобок, чтобы получившееся выражение делилось на* 2000 *без остатка. Другие операции, знаки и числа использовать нельзя.*

Решение: Докажем сначала лемму: из любых записанных подряд p целых чисел (p — натуральное число) можно при помощи операций, разрешённых в задаче, создать число, делящееся на p.

Доказательство леммы. Пусть дан ряд из p целых чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Рассмотрим последовательные суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$.

Если все эти суммы имеют разные остатки от деления на p, то среди них есть 0, тогда расставив между всеми числами знак умножения, получим число, делящееся на p. Пусть какие-либо две суммы, например, S_m и S_n $(m > n)$ имеют один и тот же остаток, то $S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m$ делится на p, и мы создаём число $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m) \cdot a_{m+1} \cdot a_p$, которое также делится на p. Лемма доказана.

Пусть теперь даны 23 произвольных целых числа. Заметим, что $5^3 \cdot 2^4 = 2000$ и $5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 23$ и разобъём числа на три группы по 5 чисел и 4 группы по два числа (числа в каждой группе — последовательные в данной строке). Применяя лемму, расставим в каждой из групп знаки так, чтобы полученное число делилось на количество элементов в группе. Группы окружим скобками и поставим между ними знак умножения. Очевидно, получившееся число делится на 2000.

Замечание. Число 23 в условии задачи уменьшить нельзя: последовательность из 22 единиц такова, что указанными в условии действиями числа, делящегося на 2000, не получить.

11-й КЛАСС

11.1. *Пусть $f(x)$ — некоторая функция, непрерывная и монотонная в некотором интервале. Пусть $g(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, т.е. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Обозначим через $G(x)$ функцию, обратную к $F(x) = mf(kx+b)+a$ (здесь m, k, b, a — некоторые константы). Выразить $G(x)$ через $g(x)$.*

Решение: Способ первый. Пусть $y = mf(kx+b)+a$. Искомая функция $G(x)$ определяется с помощью уравнения $mf(ky+b)+a = x$. Отсюда $\dfrac{x-a}{m} = f(ky+b)$, т.е, $ky+b = g\left(\dfrac{x-a}{m}\right)$, и $y = \dfrac{1}{k}\left(g\left(\dfrac{x-a}{m}\right) - b\right)$.

Способ второй. Чтобы получить график $F(x)$, следует график $f(x)$
1) сжать в k раз по оси Ox и сдвинуть вдоль этой оси на $-\dfrac{b}{k}$,
2) растянуть в m раз по оси Oy и сдвинуть вдоль этой оси на a.
График $G(x)$ получается из графика $F(x)$ (а график $g(x)$ — из графика $f(x)$) переменой осей Ox и Oy. Поэтому график $G(x)$ получится, если график $g(x)$
1) растянуть в m раз по оси Ox и сдвинуть вдоль этой оси на a,
2) сжать в k раз по оси Oy и сдвинуть вдоль этой оси на $-\dfrac{b}{k}$.
Но это означает, что $G(x) = \dfrac{1}{k}\left(g\left(\dfrac{x-a}{m}\right) - b\right)$.

Ответ: $G(x) = \dfrac{1}{k}\left(g\left(\dfrac{x-a}{m}\right) - b\right)$.

11.2. *На доске записано выражение*

$$a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \cos 4x + \ldots + a_{2006} \cos 2006x + a_{2007} \sin 2007x.$$

Двое игроков играют в следующую игру: они по очереди произвольным образом подставляют вместо коэффициентов a_i действительные числа. После того, как будет сделано 2007 ходов, на доске образуется некоторая функция $f(x)$. (Такая функция называется тригонометрическим полиномом). Начинающий выигрывает, если эта функция имеет корень на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ и проигрывает в противном случае. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш, и как ему следует для этого играть?

Решение: Одна из возможных выигрышных стратегий начинающего заключается в следующем: до тех пор, пока есть такая возможность он ставит произвольные числа в качестве коэффициентов перед косинусами, затем делает совершенно произвольные ходы, кроме последнего. Последним ходом он заменяет некоторый коэффициент a_{2k-1} на любое число, модуль которого больше, чем сумма модулей остальных выставленных игроками чисел. Покажем, что в этом случае $f(x)$ имеет корень на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. В самом деле, числа $t = \dfrac{\pi}{2\cdot(2k-1)}$ и $-t$, очевидно, принадлежат этому отрезку. $f(t) = a_{2k-1} + \sum\limits_{i=1}^{1003} a_{2i} \cos 2ix + \sum\limits_{i=1,\, i\neq k}^{1004} a_{2i-1} \sin(2i-1)x$, и (в силу выбора

a_{2k-1} и того, что модули синуса и косинуса не превосходят 1), это значение имеет тот же знак, что и a_{2k-1}. Аналогично, $f(-t)$ имеет знак, противоположный знаку a_{2k-1}. По свойству непрерывной на отрезке $[-t;t]$ функции, $f(x)$ имеет на этом отрезке корень x_0. Ясно, что $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: Выигрывает начинающий.

11.3. 1000 *радиусов разделили круг на* 1000 *равных секторов:* 500 *синих и* 500 *красных. В синие секторы, начиная с некоторого, против движения часовой стрелки записали последовательно (по одному числу в сектор) все натуральные числа от* 1 *до* 500 *включительно. В красные секторы, начиная с какого-то, записали также последовательно (по одному числу в сектор) эти же числа, но уже по часовой стрелке. Докажите, что существует полукруг, в котором записаны все натуральные числа от* 1 *до* 500, *если а) цвета секторов чередуются, б) цвета секторов расположены в произвольном порядке.*

Решение: Докажем сразу пункт б). Сделаем это двумя способами.

Способ 1 (операционный).

Раскраску и нумерацию круга удовлетворяющих условию задачи будет называть конфигурацией. назовём конфигурацию правильной, если найдётся полукруг, удовлетворяющий условию задачи — правильный полукруг.

На множестве всевозможных конфигураций определим операцию (m, n), которая каждой конфигурации круга сопоставляет новую: всем числам на синих секторах добавляет m, а ко всем числам на красных секторах добавляет n (если при этом какие-либо числа превосходят 500, то 500 вычитается из них достаточное число раз). Заметим, что если конфигурация A правильная, то и конфигурация $A(n, n)$ также правильная. Действительно, если в правильном полукруге добавить ко всем числам одно и тоже число, то все числа останутся различными, а полукруг останется правильным.

Рассмотрим какую-либо правильную нумерацию A. Тогда её правильный полукруг содержит первый (против хода часовой стрелки) элемент. Пусть на нём написано число r, рассмотрим конфигурацию $A(501-r, 501-r)$. Тогда в соответствующем ей правильном полукруге написаны все числа от 1 до некоторого k ($1 \leqslant k \leqslant 500$), а все числа от $k+1$ до 500 — в красных секторах. Рассмотрим первый сектор в этом полукруге, если идти по часовой стрелке. Он или красный, тогда на нём написано $k+1$, или синий, с числом k. Рассмотрим первый сектор вне этого полукруга (если идти по часовой стрелке). Он или красный, тогда на нём написано 1, или синий – с числом 500.

Теперь рассмотрим конфигурацию $A(502-r, 501-r)$, полученную из предыдущей добавлением 1 ко всем числам в синих секторах. В этой конфигурации в бывшем правильном полукруге в синих секторах числа от 2 до $k+1$, в красных секторах нумерация не изменилась. Этот полукруг содержит все числа в точности по разу, кроме числа 1, которого нет в полукруге и числа $k+1$, которое присутствует дважды. Но первый сектор в этом полукруге, если идти по часовой стрелке, содержит число $k+1$, а первый сектор вне этого полукруга, если идти по часовой стрелке, содержит число 1. Повернём полукруг на один сектор по часовой стрелке - получим правильный полукруг для конфигурации $A(502-r, 501-r)$.

Итак, если A - правильная, то и $A(502-r, 501-r)$ - правильная, применяя не меняющую правильность операцию $(r-1, r-1)$, имеем, что $A(1,0)$ - правильная, тогда и $A(n,0)$ правильная для любого n. Отсюда для любых m, n правильной будет и $A(n,m)$.

Рассмотрим какую-либо правильную конфигурацию A. Рассмотрим два соседних сектора разных цветов, назовём их M и N. Обозначим через B ситуацию, полученную из A переменой цвета секторов M, N. Покажем, что B - правильная конфигурация. Действительно, пусть на M, N написаны числа m, n соответственно. Тогда в конфигурации $A(n,m)$ в этих секторах стоят одинаковые числа. Поменяем расцветку секторов M, N. По прежнему, в синих секторах числа упорядочены против хода часовой стрелке, в красных — по ходу, следовательно это конфигурация. Правильный полукруг для конфигурации $A(n,m)$ останется правильным и после перемены цветов, следовательно, конфигурация правильная. Применим к ней сохраняющую правильность операцию $(500-n, 500-m)$ - получим конфигурацию B. Следовательно она правильная. Итак, от перемены цвета соседних секторов правильность конфигурации не меняется.

Рассмотрим произвольную конфигурацию. Рассмотрим произвольный синий сектор, назовём его целью. Рассмотрим первый по часовой стрелке от него синий сектор — текущий. Пусть между ними k $(0 \leqslant k \leqslant 250)$ красных секторов, тогда k раз меняя цвет перемещаем текущий сектор вплотную к цели. Теперь назовём уже текущий сектор целью, назовем текущим следующий от него синий сектор - текущим... Повторяя эту последовательность действий 499 раз добиваемся того, что все 500 синих секторов идут подряд. Теперь они образуют полукруг, содержащий все 500 чисел, то есть правильный полукруг, следовательно полученная конфигурация правильная. Проделываем все те же операции в обратном порядке, получаем исходную операцию. Все эти операции сохраняют правильность - следовательно исходная операция правильная. В силу произвольности исходной конфигурации задача решена.

<u>Способ 2</u> (дискретно-непрерывный)

Нарисуем (отдельно от круга) некоторую окружность, разделим её на 500 равных дуг и пронумеруем их числами от 1 до 500 например по часовой стрелке. Теперь сопоставим каждому полукругу определённую раскраску нашей окружности по следующему правилу. Если номер дуги есть на синем секторе из нашего полукруга, то покрасим эту дугу в синий цвет, если на красном - в красный. При этом возможно какую-то дугу окрасили двумя разными цветами, а какую-то никак не красили.

Для каждой дуги (или сектора) направление налево - "против часовой стрелки", направление направо – "по часовой стрелке".

Заметим, что если в полукруге есть одинаково покрашенные секторы M и N $(M > N)$, то в нём есть секторы того же цвета $N+1, N+2, \ldots M-1$ или секторы $1, 2, \ldots N-1$ и $M+1, M+2, \ldots 500$ (в зависимости от того, есть ли на полукруге так покрашенные секторы 1 и 500). Но и в том и другом случае объединение дуг с соответствующими номерами есть единый кусок, большая дуга окружности. У каждой такой большой дуги есть крайне правая дуга, (если идти по часовой стрелке) — "правый" конец, есть крайне левая дуга (если идти против часовой стрелки) — "левый" конец.

Сдвинем полукруг на один сектор по часовой стрелке. Посмотрим как при этом изменится раскраска.

Один сектор добавили в полукруг - если этот сектор синий, то он имеет меньший (с учетом $500 \leqslant 1$) номер, чем остальные сектора, то есть ему соответствует дуга, перед левым концом (если идти против часовой стрелки) прежнего синего сектора — левый конец синего участка переместится налево — против часовой стрелки; если этот сектор красный, то он имеет больший (с учетом $500 \leqslant 1$) номер, чем остальные сектора, то есть ему соответствует дуга сразу после (если идти по часовой стрелке) правого конца прежнего красного сектора — правый конец красного участка переместится направо — по часовой стрелке.

Ещё один сектор убрали из полукруга - если этот сектор синий, то он имеет больший (с учетом $500 \leqslant 1$) номер, чем остальные сектора, то есть ему соответствует правый конец прежнего синего сектора — правый конец синего участка перемещается налево — против часовой стрелки; если этот сектор красный, то он имеет меньший (с учетом $500 \leqslant 1$) номер, чем остальные сектора, то есть ему соответствует левый конец (если идти по часовой стрелке) прежнего синего сектора — левый конец красного участка переместится направо — по часовой стрелке.

Итак, при сдвиге полукруга на один сектор по часовой стрелке синий участок окружности движется против часовой стрелке, а красный - по часовой, при этом перемещение возможно не более чем на 1 сектор.

Зафиксируем произвольный круг, удовлетворяющий условиям задачи. Рассмотрим какой-либо полукруг. Закрасим соответствующим образом окружность. Повернём 250 раз полукруг по часовой стрелке. Тогда синий и красный участки поменялись местами (в силу симметрии задачи к переменам цветов синий- красный). Тогда среди 250 полукругов был такой, для которого ближайший сосед слева левого конца синего участка есть правый конец красного. Поскольку общая сумма дуг на этих двух участках есть 500, а на всей окружности тоже 500 дуг, то эти участки не пересекаясь содержат всю окружность. Следовательно все числа на этом полукруге различны, существование такого полукруга и необходимо было доказать.

11.4 *В треугольник, длины всех сторон которого измеряются целыми числами, вписан круг радиуса* 1. *Достаточно ли этой информации, чтобы однозначно восстановить длины всех сторон треугольника? Ответ обосновать.*

Решение: Пусть a, b, c — стороны такого треугольника, p — его полупериметр. По формуле Герона радиус вписанной окружности равен $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, откуда $p = (p-a)(p-b)(p-c)$.

Без ограничения общности можно считать, что

$$r_1 = p - c \leqslant r_2 = p - b \leqslant r_3 = p - c.$$

В силу неравенства треугольника все эти числа положительны, кроме того они все или одновременно целые, или одновременно полуцелые. Но теперь

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 r_2 r_3,$$

следовательно r_i все являются целыми. r_3 больше остальных, и, как легко заметить, равенство $r_1 = r_2 = r_3$ невозможно. Тогда $r_1 + r_2 < 2r_3$. С другой стороны, $r_1 + r_2 = (r_1 r_2 - 1)r_3$, то есть r_3 делит $r_1 + r_2$, следовательно $r_3 = r_1 + r_2$. Отсюда $r_1 r_2 = 2$. Тогда $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Итак, $p = 6$, $c = 5$, $b = 4$, $a = 3$.

Ответ: Да, такой треугольник единственный, длины сторон 3, 4 и 5.

11.5. Доказать теорему Лагерра. *Известно, что уравнение* $x^3+ax^2+bx+c=0$ *имеет три различных действительных корня. Докажите, что все они расположены на интервале с концами* $\dfrac{-a\pm 2\sqrt{a^2-3b}}{3}$.

Решение: Способ первый. Пусть x, x_2 и x_3 — корни уравнения. По теореме Виета для кубического уравнения $x+x_2+x_3=-a$, $xx_2+xx_3+x_2x_3=b$. Отсюда $(a+x)^2=(x_2+x_3)^2<2(x_2^2+x_3^2)$ (здесь мы учли, что $x_2\neq x_3$). Далее легко проверить, что

$$x_2^2+x_3^2=(x+x_2+x_3)^2-2(xx_2+xx_3+x_2x_3)-x^2=a^2-2b-x^2.$$

Поэтому $(a+x)^2<2(a^2-2b-x^2)$ — квадратное неравенство относительно x. Решая это неравенство, получаем $\dfrac{-a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}<x<\dfrac{-a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}$.

Способ второй. Обозначим $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Рассмотрим уравнение

$$f'(y)=3y^2+2ay+b=0.$$

Поскольку $f(x)=0$ имеет три действительных корня, то последнее уравнение имеет два корня, равные $y_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3}$. Рассмотрим $g_i(x)=f(x)-f(y_i)$. Отметим, что $g_i(y_i)=g_i'(y_i)=0$, тогда $g_i(x)$ делится на $(x-y_i)^2$, их частное есть многочлен первой степени. Теперь для некоторого z_i

$$x^3+ax^2+bx+c-f(y_i)=f(x)-f(y_i)=g_i(x)=(x-y_i)^2(x-z_i).$$

Начиная раскрывать скобки, (или по теореме Виета) имеем $-a=2y_i+z_i$. Отсюда $z_{1,2}=\dfrac{-a\mp 2\sqrt{a^2-3b}}{3}$. Но $f(z_1)=f(y_1), f(z_2)=f(y_2)$ разных знаков, следовательно на каждом из промежутков (z_1,y_2), (y_2,y_1),(y_1,z_1) содержится в точности по одному корню уравнения $f(x)=0$, в частности все они лежат на промежутке (z_1,z_2), что и требовалось доказать.