ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

8 класс

День первый

8.1. Существует ли выпуклый четырехугольник $ABCD$ со свойством: внутри него существует такая точка M, что $AB = BM$, $BC = MC$, $DC = CM$, $AD = AM$?

Решение. Пусть такая точка M есть, тогда точки B, D находятся по разные стороны от угла $\angle AMC$. Один из углов $\angle AMC$ (или содержащий B, или содержащий D) не меньше развернутого. Пусть тот, что содержит B. Тогда один из углов $\angle AMB, \angle BMC$ не меньше прямого, пусть $\angle AMB$. По построению треугольник AMB равнобедренный, следовательно $\angle AMB = \angle BAM$, и в треугольнике AMB только один угол BMA может быть острым. Противоречие.

Ответ. Нет.

8.2. На доске записали 3 целых числа a, b, c. Каждую минуту вместо этих трех чисел на доску записываются числа $|a-b|, |b-c|, |c-a|$. Верно ли, что для всякого выбора начальной тройки чисел в некоторый момент времени на доске появится хотя бы один нуль?

Решение. Заметим, что если $a, b, c > 0$, то $\max(a,b,c) > \max(|a-b|, |b-c|, |c-a|)$. Следовательно, поскольку все числа целые, выполнено $\max(a,b,c) \geqslant \max(|a-b|, |b-c|, |c-a|) + 1$.

Рассмотрим произвольную тройку a, b, c. Сделаем один шаг, получим тройку $|a-b|, |b-c|, |c-a|$. Теперь все числа в тройке неотрицательные, легко видеть, что они не будут отрицательными и позже. Тогда ноль появится не позже чем $\max(|a-b|, |b-c|, |c-a|) + 1$ шаге. Действительно, если нолей нет, то на каждом шаге максимальное число в тройке уменьшается минимум на 1, Поскольку на втором шаге оно равно $\max(|a-b|, |b-c|, |c-a|)$, то не позже, чем через $\max(|a-b|, |b-c|, |c-a|)$ шаг максимальное возможное число в тройке будет 0.

Ответ. Верно.

8.3. Одна комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на её заседаниях присутствовало по 10 человек, причём никакие двое из её членов не присутствовали одновременно более, чем на одном заседании. Докажите, что число членов комиссии больше 60.

Решение. Из 10 человек можно организовать $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ различных пар; на 40 заседаниях поэтому присутствовало $40 \cdot 45 = 1800$ пар. Если в комиссии n членов, то общее число различных пар равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Имеем неравенство $\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 1800$, откуда (учитывая, что n неотрицательно) получаем $n > 60$.

8.4. Известно, что для любого положительного числа V расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки объема V минимален, если высота банки равна диаметру основания. Опираясь на этот факт доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки и ручек) объема V минимален, если высота кастрюли равна половине диаметра ее основания.

Замечание. Для решения задачи, вообще говоря, не требуется знание следующих формул:

объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$,

площадь круга $S_c = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

площадь боковой поверхности цилиндра $S_b = \pi dh$,

где h - высота, d - диаметр цилиндра и $\pi \approx 3,14\ldots$.

Решение. Рассмотрим цилиндрическую кастрюлю объема V и высотой равной ее радиусу. Пусть площадь ее поверхности равна S_0. Назовем такую кастрюлю правильной. Возьмем еще одну такую же кастрюлю. Поставим ее вверх дном на первую кастрюлю. Получим консервную банку, которая имеет объем $2V$ и полную площадь поверхности $2S_0$. При этом она имеет ширину равную диаметру, следовательно оптимальна среди всех банок объемом $2V$.

Рассмотрим теперь произвольную цилиндрическую кастрюлю объема V. Пусть она имеет полную площадь поверхности S. Возьмем еще одну такую же кастрюлю. Поставим ее вверх дном на первую кастрюлю. Получим консервную банку, которая имеет объем $2V$ и полную площадь поверхности $2S$. Тогда она имеет площадь поверхности не меньше оптимальной, то есть $2S_0$, таким образом $S_0 \leqslant S$. Итак, полная поверхность произвольной цилиндрической кастрюли не меньше поверхности правильной кастрюли того же объема, что и требовалось доказать.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

8 класс
День второй

8.5. В треугольнике ABC $\angle B = 20°$, $\angle C = 40°$, и длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность $BC - AB$.

Решение.
Отложим на луче $[BA)$ точку D так, чтобы $BC = BD$ (рис. 2). Подсчитаем углы: $\angle CAB = 180° - 20° - 40° = 120°$, $\angle CAD = 180° - \angle CAB = 60°$, $\angle CAM = 0,5\angle CAB = 60°$, $\angle BCD = 0,5(180° - 20°) = 80°$, $\angle DCA = 80° - \angle BCA = 40°$. Таким образом, треугольники CAM и CAD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда $BC - AB = AD = AM = 2$ см.

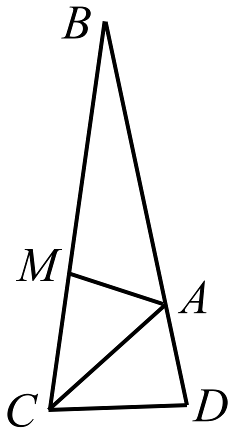

Рис. 2

Ответ. 2 см.

8.6. Докажите, что $\dfrac{\text{ВДОХ}}{\text{ВЫДОХ}} \neq \dfrac{\text{ВХОД}}{\text{ВЫХОД}}$. В этом ребусе разным буквам соответствуют разные цифры.

Решение. Предположим противное, т.е. пусть для некоторого набора значений букв имеет место равенство. Обозначим число $\overline{\text{ДОХ}}$ через x, число $\overline{\text{ХОД}}$ через y, число $1000 \cdot \text{В}$ через a и число $1000 \cdot \overline{\text{ВЫ}}$ через b. Тогда равенство получит вид $\dfrac{a+x}{b+x} = \dfrac{a+y}{b+y}$. Перемножая крест накрест и приведя подобные, придём к равносильному равенству $bx + ay = = ax + by \Leftrightarrow (a-b)(x-y) = 0$. Но это равенство места не имеет, так как по условию задачи $a \neq b$ и $x \neq y$. Противоречие.

8.7. В пяти пакетах лежит 21 конфета, причём в разных пакетах количества конфет попарно различны. Известно, что конфеты из любых двух пакетов можно разложить в три оставшихся пакета так, что в этих трех пакетах конфет станет поровну. Докажите, что имеется пакет, в котором лежит ровно 7 конфет.

Решение. Если в каждом пакете меньше 7 конфет, то всего конфет не больше, чем $6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 20 < 21$ — противоречие. Если же в некотором пакете больше 7 конфет, то перекладывая конфеты из любых двух других пакетов, не удастся получить три пакета по 7 конфет в каждом — снова противоречие. Остаётся единственный вариант: в одном пакете 7 конфет, в остальных — меньше. Такой вариант, удовлетворяющий условию задачи, возможен. Например, в пакетах лежат 7, 5, 4, 3 и 2 конфеты соответственно (проверяется перебором).

8.8. Имеется дробь $\dfrac{2006}{2007}$. Каждую секунду к ее числителю прибавляется число 6, а к знаменателю - число 7. Одно поверие гласит: в тот момент, когда получится дробь, сократимая на 11, математические олимпиады прекратятся. Докажите, что школьникам не следует этого бояться.

Решение. Через n секунд дробь будет иметь вид $\dfrac{2006+6n}{2006+7n}$. Предположим что она сократима на 11, тогда делятся на 11 числа $a = 2006 + 6n$, $b = 2007 + 7n$. Тогда число $7a - 6b$ также делится на 11. Но это неверно, так как $7a - 6b = 2000$, а число 2000 на 11 не делится.

8.9. *Докажите теорему В.Э.Гейта.* Пусть уравнение относительно t

$$d - \frac{c^2}{4t} = \frac{1}{4}(t-b)^2$$

имеет положительный корень. Доказать, что тогда для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$x^4 + bx^2 + cx + d \geqslant 0.$$

Решение. Пусть $d = \alpha^2 > 0$ - положительный корень уравнения. Тогда $d - \dfrac{c^2}{4\alpha^2} = \dfrac{(b-\alpha^2)^2}{4}$ и при $\beta = \dfrac{c}{2\alpha}$ теорема следует из цепочки

$$x^4 + bx^2 + cx + d = x^4 + bx^2 + (d - \frac{c^2}{4\alpha^2}) + \frac{c^2}{4\alpha^2} + cx =$$

$$= x^4 + (b-\alpha^2)x^2 + \frac{(b-\alpha^2)^2}{4} + (\alpha x)^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 =$$

$$= (x^2 + \frac{b-\alpha^2}{2})^2 + (\alpha x + \beta)^2 \geqslant 0.$$

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

9 класс
День первый

9.1. Докажите, что при $0 < x \leqslant 1/2,\ 0 < y \leqslant 1/2$ имеет место неравенство Ки Фана $\dfrac{x+y}{2-x-y} \geqslant \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$.

Решение. Пусть $x+y = a$, $xy = b$. Тогда $0 < a \leqslant 1$, $0 < b \leqslant 1/4$, а неравенство Ки Фана принимает вид $\dfrac{a}{2-a} \geqslant \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-a+b}}$. Подвергнем это неравенство равносильным (в силу ограничений на a и b) преобразованиям:

$$a\sqrt{1-a+b} \geqslant (2-a)\sqrt{b} \Leftrightarrow a^2(1-a+b) \geqslant (4-4a+a^2)b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(1-a) \geqslant 4b(1-a)$$

Это, в свою очередь, эквивалентно ($a^2 \geqslant 4b$ или $1-a = 0$), но из $1-a = 0$ следует, что $a^2 = a = 1 \geqslant 4b$. Итак, $a^2(1-a) \geqslant 4b(1-a)$ равносильно $a^2 \geqslant 4b$. Тогда, возвращаясь к исходным обозначениям имеем

$$a^2 \geqslant 4b \Leftrightarrow (x+y)^2 \geqslant 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно.

9.2. Существует ли такая плоская фигура F, что ею нельзя целиком накрыть полукруг радиусом 1, а двумя ее экземплярами можно целиком накрыть круг радиусом 1: а) если фигура F - невыпуклая, б) если фигура F - выпуклая?

Решение. Впишем в единичную окружность квадрат $ABCD$. б) Искомая выпуклая фигура получается из единичного круга двумя отрезами по AB, CD. а) Например круг без двух диаметров AC, BD, но с включенным в нее центром круга.

Ответ. а) существует; б) существует.

9.3. На доске выписан набор натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Разрешается производить две операции: 1) стереть два числа и написать модуль их разности; 2) написать на доске среднее арифметическое любых двух чисел (ничего не стирая). Можно ли в какой-то момент получить набор

$$\frac{2007}{2}, \frac{2006}{4}, \frac{2005}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{2007}}\ ?$$

Решение. Заметим, что при указанных преобразованиях не может возникнуть отрицательное число. Поэтому в силу свойства среднего арифметического и свойства модуля максимум из всех чисел не увеличивается. Но так как $\dfrac{2007}{2} > 1000$, то получить требуемый набор чисел невозможно.

Ответ. Невозможно.

9.4. Известно, что для любого положительного числа V расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки объема V минимален, если высота банки равна диаметру основания. Опираясь на этот факт доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки и ручек) объема V минимален, если высота кастрюли равна половине диаметра ее основания.

Замечание. Для решения задачи, вообще говоря, не требуется знание следующих формул:

объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$,

площадь круга $S_c = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

площадь боковой поверхности цилиндра $S_b = \pi d h$,

где h - высота, d - диаметр цилиндра и $\pi \approx 3,14\ldots$.

Решение. Рассмотрим цилиндрическую кастрюлю объема V и высотой равной ее радиусу. Пусть площадь ее поверхности равна S_0. Назовем такую кастрюлю правильной. Возьмем еще одну такую же кастрюлю. Поставим ее вверх дном на первую кастрюлю. Получим консервную банку, которая имеет объем $2V$ и полную площадь поверхности $2S_0$. При этом она имеет ширину равную диаметру, следовательно оптимальна среди всех банок объемом $2V$.

Рассмотрим теперь произвольную цилиндрическую кастрюлю объема V. Пусть она имеет полную площадь поверхности S. Возьмем еще одну такую же кастрюлю. Поставим ее вверх дном на первую кастрюлю. Получим консервную банку, которая имеет объем $2V$ и полную площадь поверхности $2S$. Тогда она имеет площадь поверхности не меньше оптимальной, то есть $2S_0$, таким образом $S_0 \leqslant S$. Итак, полная поверхность произвольной цилиндрической кастрюли не меньше поверхности правильной кастрюли того же объема, что и требовалось доказать.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

9 класс
День второй

9.5. Решить уравнение $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$.

Решение. В силу неравенства между средним квадратическим и средним геометрическим $A\sqrt{B} \leqslant \dfrac{A^2+B}{2}$, причём равенство достигается лишь при $A^2 = B,\ A \geqslant 0$. Поэтому левая часть уравнения не превосходит $\dfrac{x^2+1-y^2}{2}+\dfrac{y^2+2-z^2}{2}+\dfrac{z^2+3-x^2}{2}=3$, числа x, y и z — неотрицательны, а уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 &= 1-y^2 \\ y^2 &= 2-z^2 \\ z^2 &= 3-x^2 \end{cases}$. Отсюда $x=1, z=\sqrt{2}, y=0$.

Ответ. $x=1, z=\sqrt{2}, y=0$.

9.6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена биссектриса AM. Найдите углы треугольника, если известно, что $BM=AC$

Решение. Отразим отрезок AC относительно прямой AM. На стороне AB получим точку C_1. Треугольники ACM, AC_1M равны по первому признаку, следовательно $\angle AC_1M = \angle ACM = \angle BAC$. Так как $AB = BC, AC_1 = AC$, то $BC_1 = MC$ и треугольник MBC_1 -равнобедренный. Тогда $\angle MBC_1 = \angle BMC_1$ и

$$2\angle MBC_1 = \angle MBC_1 + \angle BMC_1 = \angle AC_1M = \angle ACM = \angle BAC.$$

Рассмотрим сумму углов треугольника ABC

$$180^0 = \angle ACM + \angle BAC + \angle MBC_1 = 5\angle MBC_1.$$

Итак $\angle MBC_1 = 36^0$, $\angle ACM = \angle BAC = 72^0$

Ответ. $36^o, 72^o, 72^o$

9.7. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1!(1+2)}+\frac{1}{2!(2+2)}+\frac{1}{3!(3+2)}+\ldots+\frac{1}{2006!(2006+2)}.$$

Здесь $n!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

Решение. $\sum\limits_{i=1}^{2006}\dfrac{1}{i!(i+2)} = \sum\limits_{i=1}^{2006}\dfrac{i+1}{(i+2)!} = \sum\limits_{i=1}^{2006}\dfrac{i+2-1}{(i+2)!} =$
$= \sum\limits_{i=1}^{2006}\left(\dfrac{1}{(i+1)!}-\dfrac{1}{(i+2)!}\right) = \sum\limits_{i=1}^{2006}\dfrac{1}{(i+1)!} - \sum\limits_{i=1}^{2006}\dfrac{1}{(i+2)!} = \sum\limits_{i=2}^{2007}\dfrac{1}{i!} - \sum\limits_{i=3}^{2008}\dfrac{1}{i!} =$
$= \dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{2008!} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2008!}.$

Ответ. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2008!}$.

9.8. По кругу расставлены n ($n > 2007$) чисел, среди которых есть не равные. Известно, что сумма любых 13 стоящих подряд чисел не превосходит 13, а сумма любых 21 стоящих подряд чисел не превосходит 21. Докажите, что сумма всех n чисел строго меньше n.

Решение. Заметим, что для всех $k < n$, если сумма любых k стоящих подряд чисел равна k, и сумма любых n стоящих подряд чисел равна n, то сумма любых $n-k$ стоящих подряд чисел равна $n-k$. Повторяя логику алгоритма Евклида имеем, что сумма любых $HOD(n,k)$ стоящих подряд чисел равна $HOD(n,k)$.

Пусть по кругу расставлены числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Введем

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Заметим, что

$$13S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_13) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_14) + \ldots + (a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}).$$

Но каждая скобка не превосходит по условию 13, скобок ровно n штук, отсюда $13S \leqslant 13n$, то есть $S \leqslant n$.

Теперь достаточно доказать, что если $S = n$, то все $a_i = 1$.

Если $S = n$, то всякая скобка равна 13, то есть сумма любых 13 стоящих подряд чисел равна 13, аналогично показывается, что сумма любых 21 стоящих подряд чисел равна 21. Тогда сумма любых $HOD(21,13)$ стоящих подряд чисел равна $HOD(21,13)$, то есть всякое число равно 1.

9.9. Верно ли, что среди любых 50 попарно различных натуральных чисел от 1 до 100 всегда найдется или два числа с суммой 100, или точный квадрат.

Решение. Разобъем все натуральные числа от 1 до 100 на пары: $(1,99), \ldots, (49,51), (50,100)$. Предположим противное. Пусть были выбраны такие 50 попарно различных натуральных чисел, что среди них нет ни двух чисел с суммой 100, ни точного квадрата. Тогда из каждой пары было взято не более одного числа. Действительно, если два числа была взято в паре $(50,100)$, то был взят точный квадрат - число 100. Если же два числа было взято из какой-либо другой пары, то в сумме эти два числа должны давать 100.

Следовательно из каждой пары было взято не более одного числа. Но пар 50, но тогда из каждой взяли в точности одно число, в частности было взято одно из чисел в паре $(36,64)$. Однако каждое из этих двух чисел - точный квадрат, что противоречит предположению. Противоречие.

Ответ. Да, верно.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

10 класс
День первый

10.1. Докажите, что если действительные коэффициенты квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяют условию $ac < 0$, то уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень.

Решение. Существует два корня уравнения $f(x) = 0$, один больше, другой меньше ноля. Пусть x_0 - корень, имеющий тот же знак, что и a, то есть $x_0a > 0$. Рассмотрим уравнение
$$ax^2 + bx + c = x_0,$$
тогда оно имеет положительный дискриминант $(b^2 - 4ac + x_0a)$, то есть имеет решение x_1. Отсюда $f(x_1) = x_0$ и $f(f(x_1)) = f(x_0) = 0$.

10.2. Даны 100 целых чисел $a_1, \ldots, a_{100}$. Петя вычислил сумму:
$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{100}}$$
и получил, что $S = 1$. Вася вычислил произведение $\Pi = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{100}$ этих чисел и получил число, оканчивающееся на 9876543210. Докажите, что хотя бы один из мальчиков ошибся в вычислениях.

Решение. Предположим противное. Так как произведение $\Pi = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{100}$ делится на 2, но не делится на 4, среди этих чисел ровно одно четное. Пусть a_1. Приведя все сложенные Петей дроби к общему знаменателю, равному Π, в числителе получим сумму 100 слагаемых, среди которых ровно одно (полученное от дроби $\frac{1}{a_1}$) нечетно. Таким образом, в числителе имеем нечетное число, а в знаменателе четное. Тогда число S не может быть целым. Противоречие

10.3. Имеется треугольник с меньшей стороной c и противолежащим ей углом γ. Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше c. Докажите, что $\gamma \geqslant 36^o$

Решение. Обозначим вершины треугольника ABC так, чтобы $\angle C = \gamma$ и $BC \geqslant AC$. Обозначим углы $\angle A$ и $\angle B$ через α и β соответственно, тогда $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Тогда на стороне AC найдется точка M со свойством $BM = MC$. Точки B и C разного цвета, поэтому точка M одного цвета с B или с C. Значит $MB \leqslant c$ и $\angle BAM \leqslant \angle BMA$, то есть, $\alpha \leqslant 2\gamma$. Тогда $180^o = \alpha + \beta + \gamma \leqslant 2\alpha + \gamma \leqslant 5\gamma$. Отсюда $\gamma \geqslant 36^o$.

10.4. Известно, что для любого положительного числа V расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки объема V минимален, если высота банки равна диаметру основания. Опираясь на этот факт доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки и ручек) объема V минимален, если высота кастрюли равна половине диаметра ее основания.

Замечание. Для решения задачи, вообще говоря, не требуется знание следующих формул:

объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$,

площадь круга $S_c = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

площадь боковой поверхности цилиндра $S_b = \pi d h$,

где h - высота, d - диаметр цилиндра и $\pi \approx 3,14\ldots$.

Решение. Рассмотрим цилиндрическую кастрюлю объема V и высотой равной ее радиусу. Пусть площадь ее поверхности равна S_0. Назовем такую кастрюлю правильной. Возьмем еще одну такую же кастрюлю. Поставим ее вверх дном на первую кастрюлю. Получим консервную банку, которая имеет объем $2V$ и полную площадь поверхности $2S_0$. При этом она имеет ширину равную диаметру, следовательно оптимальна среди всех банок объемом $2V$.

Рассмотрим теперь произвольную цилиндрическую кастрюлю объема V. Пусть она имеет полную площадь поверхности S. Возьмем еще одну такую же кастрюлю. Поставим ее вверх дном на первую кастрюлю. Получим консервную банку, которая имеет объем $2V$ и полную площадь поверхности $2S$. Тогда она имеет площадь поверхности не меньше оптимальной, то есть $2S_0$, таким образом $S_0 \leqslant S$. Итак, полная поверхность произвольной цилиндрической кастрюли не меньше поверхности правильной кастрюли того же объема, что и требовалось доказать.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

10 класс
День второй

10.5. Решить в натуральных числах уравнение

$$x! + y! + z! = t!$$

Здесь, как обычно, $n!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

Решение. Без ограничения общности $x \leqslant y \leqslant z$. В силу $z! < t!$ имеем $z < t$, то есть $z + 1 \leqslant t$. Кроме того $x! \leqslant y! \leqslant z!$. Следовательно

$$(z + 1)z! = (z + 1)! \leqslant x! + y! + z! = t! \leqslant 3z!,$$

то есть $z = 1$ или $z = 2$. Но очевидно, что $t! \geqslant 3$, тогда $t \geqslant 3$ и $t! \geqslant 6$. Следовательно среднее арифметическое чисел $x!, y!, z!$ не меньше 2. Однако самое большое из них z не больше 2, следовательно все $x!, y!, z!$ равны 2.

Ответ. $x = y = z = 2, t = 3$

10.6. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \geqslant \frac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}.$$

Решение. Положим $a = \mathrm{tg}\alpha$, $b = \mathrm{tg}\beta$, $c = \mathrm{tg}\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in (-\pi/2; \pi/2)$. Тогда

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} = \frac{|\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta|}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\beta)}} =$$

$$|\cos\alpha \cdot \cos\beta| \cdot |\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta| = |\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha| = |\sin(\alpha - \beta)|.$$

Аналогично рассуждая, получаем эквивалентное исходному неравенство

$$|\sin(\alpha - \gamma)| \leqslant |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)|.$$

Но оно очевидно вытекает из неравенства треугольника

$$|\sin|(\alpha - \gamma)| \leqslant |\sin|(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma)| +$$

$$+|\sin(\beta - \gamma)\cos(\alpha - \beta)| \leqslant |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)|.$$

10.7. Пусть BD - биссектриса угла B треугольника ABC. Точка E выбрана так, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$, и при этом отрезок ED пересекает отрезок AB в точке K. Докажите, что $KE = KD$.

Решение. Из пересечения ED и AB, точка E должна быть вне треугольника. Из свойств биссектрис точка D равноудалена от AB и BC, следовательно $KD\sin\angle BKD$, как расстояние от D до AB, равно расстоянию от D до BC, то есть равно $CD\sin\angle ACB = AE\sin\angle EAB$, что совпадает с расстоянием от E до AB, то есть с $KE\sin\angle EKA$. Отсюда $KE\sin\angle EKA = KD\sin\angle BKD$, теперь из вертикальности углов $\angle EKA, \angle BKD$ имеем $KE = KD$ или $\angle EKA = \sin\angle BKD = 0$. Но последнее невозможно, поскольку тогда $\angle B = 2\angle ABD = 0$ и треугольник ABC вырожденный. Следовательно $KE = KD$.

10.8. Даны 333 отрезка с длинами 1, 2, 3, …, 333 см. Два игрока по очереди берут себе по одному отрезку, пока не останутся неразобранными ровно три отрезка. Если из этих отрезков можно сложить треугольник (ненулевой площади), то выигрывает первый игрок, если нельзя — второй. У кого из игроков, начинающего или его противника, есть выигрышная стратегия?

Решение. Разделим все отрезки на две группы: в первую отнесём все отрезки длины 167 или меньше, во вторую — все остальные. Выигрышная стратегия второго такова: если первый выбирает отрезок из первой группы, то второй берёт наименьший ещё не взятый отрезок из второй группы; если же первый выбирает отрезок из второй группы, то второй берёт наибольший не взятый отрезок из первой группы. Ясно, что стратегия осуществима (так как каждой парой ходов игроки берут ровно по одному отрезку из каждой группы, всего таких пар ходов 165, а в каждой группе более 165 отрезков). Также ясно, что к моменту окончания игры останется ровно два отрезка из первой группы, и один из второй. Пусть длина отрезка, оставшегося во второй группе k см ($168 \leqslant k \leqslant 333$). Тогда все отрезки с длинами, большими k (их $333-k$ штук) взяты первым игроком, поэтому второй игрок по крайней мере $333-k$ раз брал отрезок из первой группы. Значит, наибольший из двух оставшихся отрезков первой группы не больше, чем $167-(333-k) = k-166$. Сумма оставшихся отрезков первой группы не больше, чем $(k-166)+(k-167) = k+(k-333) \leqslant k$, треугольник быть составлен не может, второй игрок выигрывает.

Существуют и другие стратегии.

Ответ. У противника начинающего.

10.9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+1 = y^2 \\ y+1 = z^2 \\ z+1 = x^2 \end{cases}$$

Решение. Введем функцию $g(u) = u^2-1$. Отметим, что во-первых уравнение $g(u) = u$ имеет два корня $u_0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $u_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Во-вторых, если $x > u_1$, то $g(x) > x$, а если $x \in (u_0, u_1]$, то $g(x) \leqslant x$.

Заметим, что система равносильна уравнениям $g(x) = z, g(z) = y, g(y) = x$, сводящейся к уравнению $g(g(g(x))) = x$. Поскольку $g(u)$ всегда не меньше -1, то и $x, y, z \geqslant -1$.

Далее, если какое-то число из (x, y, z) больше u_1, пусть для определенности это число x, тогда $z = g(x) > x > u_1^2-1 = u_1$. Повторяя оценку для z и x имеем $y > z > x$, $x > y > z > x$. Противоречие. Следовательно $x, y, z \in [-1, u_1]$.

1) Пусть для некоторой тройки (x, y, z) - решения системы - выполнено $x \in [u_0, 0]$. g монотонна на этом отрезке, следовательно $g(x) \in [-1, u_0]$. Тогда из все той же монотонности $g(g(x)) \in [u_0, 0]$. Следовательно, $x = g(g(g(x))) \in [-1, u_0]$. Поскольку $x \in [u_0, 0]$, то $x = u_0$, по x однозначно восстанавливается $y = u_0, z = u_0$.

2) Пусть для некоторой тройки (x, y, z) - решения системы - выполнено $x \in [-1, u_0]$. Тогда аналогично предыдущему пункту $x = g(g(g(x))) \in [u_0, 0]$, откуда $x = u_0$, $y = u_0, z = u_0$.

3) Как показано ранее, если решение системы (x, y, z) отлично от тройки (u_0, u_0, u_0), то каждое из x, y, z принадлежит $[-1, u_1]$, но не может принадлежать интервалу $[-1, 0]$. Тогда все x, y, z из промежутка $(0, u_1]$. Без ограничения общности можно считать, что x - самое большое число в тройке. Тогда $g(x) \leqslant x$, но $z = g(x) \in (0, u_1]$ и, повторяя рассуждения, $y = g(z) \in (0, z]$, а затем и $x = g(y) \leqslant y$. Итак, $x \leqslant y \leqslant z \leqslant x$, то есть $x = y = z = g(x)$, откуда $x = y = z = u_1$.

Ответ. $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}), (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

11 класс
День первый

11.1. Решите при $x > 0$ неравенство $x\Big[x\Big[x[x]\Big]\Big] \leqslant 2007$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Решение. Заметим, что при $x > 0$ в левой части уравнения стоит монотонно неубывающая функция, и что при целых значениях x она равна x^4. Так как $2401 = 7^4$, то при $x \geqslant 7$ неравенство не выполняется. Покажем, что оно выполнено при $0 < x < 7$. Действительно,

$$0 \leqslant [x] \leqslant 6 \Rightarrow 0 \leqslant x[x] < 7 \cdot 6 = 42 \Rightarrow 0 \leqslant \Big[x[x]\Big] \leqslant 41 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant x\Big[x[x]\Big] < 287 \Rightarrow 0 \leqslant x\Big[x\Big[x[x]\Big]\Big] < 286 \cdot 7 = 2002 < 2007.$$

Ответ. $0 < x < 7$ (ответ $x < 7$ также считается правильным).

11.2. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника выбираются, соответственно, точки P и Q, из которых на гипотенузу BC опускаются перпендикуляры PK и QH. Найдите наименьшее значение суммы $KP + PQ + QH$.

Решение. Отобразим точку C симметрично катету AB, обозначим соответствующую точку через C'. Отобразим точку B симметрично катету AC, обозначим соответствующую точку через B'. При этом прямые BC' и CB' - параллельны (действительно BA и CA, биссектрисы соответственных углов CBB', BCC', - перпендикулярны).

Зафиксируем некоторые точки P, Q, построим основания перпендикуляров K, H. Отобразим точки K симметрично катету AB, обозначим соответствующую точку через K'. В силу симметрий треугольники PKB, $PK'B$ равны. Отобразим точку H симметрично катету AC, обозначим соответствующую точку через H'. В силу симметрий треугольники QHC, $QH'C$ равны.

Далее, из равенства треугольников $PK = PK'$, $QH = QH'$. Тогда $KP + PQ + QH = K'P + PQ + QH'$. Следовательно $KP + PQ + QH \geqslant K'H'$.

При этом прямые BC' и CB' - параллельны, и K', H' лежат на этих прямых, следовательно $B'C'$ не меньше расстояния r между этими прямыми. Таким образом $KP + PQ + QH \geqslant r$ при любом выборе P, Q.

Покажем, что эта оценка снизу достижима. Зафиксируем произвольную точку P_0 на катете AB. Проведем через нее прямую, перпендикулярную прямым BC' и CB'. Обозначим через Q точку пересечения с прямой AC. Повторяя построения, имеем, что K', P, Q, H' лежат подряд на одной прямой, следовательно $KP + PQ + QH = K'H'$. Но $r = K'H'$. Итак, оценка снизу достигается.

Для вычисления r примем в предыдущем абзаце в качестве P точку A, тогда $P = Q = A$, $K = H$ и PK - высота к гипотенузе. $KP + PQ + QH = PK + 0 + PK = \dfrac{2ABAC}{BC}$.

Ответ. $\dfrac{2ABAC}{BC}$.

11.3. На доске выписали подряд 17 натуральных чисел : $1, 2, \ldots, 17$. Петя и Вася ставят по очереди в промежутках между этими числами знак "плюс"или "умножить", выбирая знак и место по своему усмотрению. Первым начинает ходить Петя, каждый из мальчиков делает по 8 ходов. После этого подсчитывается значение полученного на доске выражения. Докажите, что при правильной игре Вася всегда может добиться того, чтобы это значение было нечетным.

Решение. Пронумеруем слева направо от первой до шестнадцатой позиции, в которые Петя и Вася могут ставить знаки. Одна из выигранных стратегий Васи такова.

Если Петя ставит знак на позицию с номером n, то Вася ставит знак на позицию с номером $17 - n$, причем, при $n = 1, 8, 9, 16$ Вася ставит знак, отличающийся от знака Пети. При остальных n Вася ставит тот же знак, что и Петя. Покажем, что значение полученного выражения будет нечетным. Если мы заменим все четные числа на 0,а все нечетные на 1, то на четность окончательно выражения не повлияет:

$$1?0?1?0?1?0?1?0?1?0?1?0?1?0?1?0?1.$$

"1", стоящее в центре, умножается на один из соседних с ней "0", поэтому может быть удалена из выражения. На ее месте останется знак "+". Из двух "1", стоящих на краях строки, одна умножена на "стоящий"рядом "0", и поэтому также может быть удалена, а другая отделена от стоящего рядом выражения знаком "+". Таким образом исходное выражение приводится к виду:

$$1 + (0?1?0?1?0?1?0) + (0?1?0?1?0?1?0?1?0).$$

Знаки, стоящие во второй скобке этого выражения симметричны знакам стоящим в первой. Поэтому выражение в скобках принимает одинаковые значения, и , значит, сумма скобок четна. Следовательно, значение всего выражения нечетно.

11.4. Два цилиндра имеют одинаковый объем V и одинаковую площадь S полной поверхности. При каких $S > 0$ и $V > 0$ эти цилиндры обязательно равны между собой?

Решение. В целом решение этой задачи делится на две части - нахождение крайнего отношения между S и V и доказательство того, что в остальных случаях цилиндр может оказаться неединственным.

Пусть $r, h > 0$ - высота и радиус некоторого цилиндра. Тогда $V = \pi r^2 h, S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Покажем экстремальную оценку. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$S = \pi rh + \pi rh + 2\pi r^2 \geqslant 3\sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot 2\pi r^2} = 3\sqrt[3]{2\pi^3 r^4 h^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Причем $S = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \Leftrightarrow \pi rh = \pi rh = 2\pi r^2 \Leftrightarrow h = 2r$. То есть, если $S = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$, то цилиндр задается однозначно.

Покажем, что это не так, если $S > 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ или, что эквивалентно, $S^3 > 54\pi V^2$. Зафиксируем произвольный $S > 0$. Примем $r_0 = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} > 0$. Введем функцию $f(x) = \frac{(S-2\pi x^2)x}{2}$ для всякого $x \in [0, r_0]$. Заметим, что

$$f(0) = f(r_0) = 0, \quad f(r_0/\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

Пусть $V > 0$ таково, что $V^2 < \frac{S^3}{54\pi} = f^2(r_0/\sqrt{3})$. Тогда поскольку функция $f(x)$ непрерывна, найдутся $r_1 \in (0; r_0/\sqrt{3})$, $r_2 \in (r_0/\sqrt{3}; r_0)$ со свойством $f(r_1) = f(r_2) = V$.

Примем теперь $h_1 = \frac{S-2\pi r_1^2}{2\pi r_1}$, $h_2 = \frac{S-2\pi r_2^2}{2\pi r_2}$. Подстановкой убеждаемся, что тогда $S_i = S$ и

$$V_i = \pi r_i^2 h_i = \frac{(S-2\pi r_i^2)r_i}{2} = f(r_i) = V.$$

Таким образом найдено два разных цилиндра с одними и теми же S, V

Ответ. $S^3 = 54\pi V^2$

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

11 класс
День второй

11.5. Известно, что для некоторого числа x числа $\sin 2x$,$\sin 5x$,$\sin 7x$ рациональны. Докажите, что число $\sin 12x$ тоже рационально.

Решение. Перемножим тождества $\sin 5x + \sin 7x = 2\sin 6x \cos x$ и $\sin 7x - \sin 5x = 2\sin x \cos 6x$. Тогда

$$\sin^2 7x - \sin^2 5x = 2\sin 6x \cos x \cdot 2\sin x \cos 6x = \sin 2x \sin 12x$$

Если $\sin 2x \neq 0$, то все показано, если $\sin 2x = 0$, то $2x = \pi k$, $12x = 6\pi k$, то есть $\sin 12x = 0$ также рационально.

(Замечание. Случай $\sin 2x = 0$ должен быть рассмотрен.)

11.6. В пространстве проведены три параллельные прямые. Докажите, что на каждой прямой можно выбрать точку так, чтобы эти три выбранные точки являлись вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Пусть a, b, c - попарные расстояния между прямыми. Можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда существование равностороннего треугольника со стороной x эквивалентно существованию решения уравнения

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - c^2}.$$

Действительно, рассмотрим призму, содержащую такой треугольник, тогда на развертке ее боковых граней треугольник превратится в ломаную из трех звеньев длины x, концы которой лежат на прямой, перпендикулярной изображенным на развертке боковым ребрам. Верно и обратное, если такая ломаная на плоскости изображена, то сворачивая этот кусок плоскости в соответствующую призму - получаем на ее ребрах три прямые с натянутым на нее графиком - сечением в виде равносторонним треугольником

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2}.$$

В точке a из монотонности $\sqrt{y}$ и $b \geqslant c$ следует, что $f(a) = \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \leqslant 0$. В точке $\sqrt{a^2 + b^2}$ из $2ab \geqslant -c^2$ выполнено $f(\sqrt{a^2 + b^2}) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} > 0$.

Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a, \sqrt{a^2 + b^2}]$, то на этом отрезке есть точка, в которой функция обращается в 0. Следовательно нужный x найдется, а с ним и треугольник.

11.7. *Докажите теорему В.Э.Гейта.* Пусть уравнение относительно t

$$d - \frac{c^2}{4t} = \frac{1}{4}(t - b)^2$$

имеет положительный корень. Доказать, что тогда для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$x^4 + bx^2 + cx + d \geqslant 0.$$

Решение. Пусть $d = \alpha^2 > 0$ - положительный корень уравнения. Тогда $d - \dfrac{c^2}{4\alpha^2} = \dfrac{(b-\alpha^2)^2}{4}$ и при $\beta = \dfrac{c}{2\alpha}$ теорема следует из цепочки

$$x^4 + bx^2 + cx + d = x^4 + bx^2 + (d - \frac{c^2}{4\alpha^2}) + \frac{c^2}{4\alpha^2} + cx =$$

$$= x^4 + (b-\alpha^2)x^2 + \frac{(b-\alpha^2)^2}{4} + (\alpha x)^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 =$$

$$= (x^2 + \frac{b-\alpha^2}{2})^2 + (\alpha x + \beta)^2 \geqslant 0.$$

11.8. На одном турнире командам была предложена олимпиада из 8 задач. Выяснилось, что каждая команда решила ровно 3 задачи. При этом любые две команды решили на двоих не менее 5 задач. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в турнире?

Решение. Покажем, что никакую задачу не решило более 3 команд. Допустим противное - некоторую задачу решили как минимум 4 команды. Для оставшихся 7 задач этими командами были найдены минимум 8 решений, следовательно найдется по крайней мере одна задача, которую решили как минимум пара из этих команд. Тогда эта пара имеет минимум две общие задачи, то есть вместе две команды решили не более четырех, что противоречит условию.

Заметим, что общее число различных решений (пар команда-задача) не более 24, поскольку каждую из 8 задач сдало не более 3 команд. Но каждая команда сдала ровно 3 задачи, следовательно команд не более 8.

Приведем пример, что для 8 команд это возможно.

$$1.(1,2,3);\ 2.(3,4,5);\ 3.(5,6,7);\ 4.(7,8,1);$$

$$5.(1,4,6);\ 6.(3,6,8);\ 7.(5,8,2);\ 8.(7,2,4).$$

Ответ. 8.
11.9. Докажите равенство:

$$\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = 3.$$

Решение. Отметим очевидное равенство

$$12\sqrt[3]{2} - 15 = 1 + 4\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4} - 16 =$$

$$1^2 + (2\sqrt[3]{2})^2 + (2\sqrt[3]{4})^2 + 2 * 2\sqrt[3]{2} - 2 * 2\sqrt[3]{4} - 2 * 2\sqrt[3]{2} * 2\sqrt[3]{4} =$$

$$= (1 + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4})^2.$$

Тогда

$$2\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} = 4 + 3 - 5 + 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4},$$

Следовательно, поскольку $128 > 125$, то $4\sqrt[3]{2} - 5 > 0$ и

$$4(\sqrt[3]{4} - 1) = 3 + 4\sqrt[3]{2} - 5 - 2\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{4\sqrt[3]{2} - 5})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{4\sqrt[3]{2} - 5} =$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt[3]{2} - 5})^2.$$

Поскольку $\sqrt[3]{4} - 1 > 0$ (в силу $4 > 3$), извлекая корень имеем

$$2\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} = \sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt[3]{2} - 5}.$$

Домножая на $\sqrt{3}$ имеем

$$2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = 3 + \sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15}.$$

Отсюда

$$\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = 3.$$

Ответ. 3