ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

8 класс

День первый

8.1. Существует ли выпуклый четырехугольник $ABCD$ со свойством: внутри него существует такая точка M, что $AB = BM$, $BC = MC$, $DC = CM$, $AD = AM$?

8.2. На доске записали 3 целых числа a, b, c. Каждую минуту вместо этих трех чисел на доску записываются числа $|a-b|, |b-c|, |c-a|$. Верно ли, что для всякого выбора начальной тройки чисел в некоторый момент времени на доске появится хотя бы один нуль?

8.3. Одна комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на её заседаниях присутствовало по 10 человек, причём никакие двое из её членов не присутствовали одновременно более, чем на одном заседании. Докажите, что число членов комиссии больше 60.

8.4. Известно, что для любого положительного числа V расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки объема V минимален, если высота банки равна диаметру основания. Опираясь на этот факт доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки и ручек) объема V минимален, если высота кастрюли равна половине диаметра ее основания.

Замечание. Для решения задачи, вообще говоря, не требуется знание следующих формул:

объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$,

площадь круга $S_c = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

площадь боковой поверхности цилиндра $S_b = \pi d h$,

где h - высота, d - диаметр цилиндра и $\pi \approx 3,14\ldots$.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

8 класс
День второй

8.5. В треугольнике ABC $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$, и длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность $BC - AB$.

8.6. Докажите, что $\dfrac{\text{ВДОХ}}{\text{ВЫДОХ}} \neq \dfrac{\text{ВХОД}}{\text{ВЫХОД}}$. В этом ребусе разным буквам соответствуют разные цифры.

8.7. В пяти пакетах лежит 21 конфета, причём в разных пакетах количества конфет попарно различны. Известно, что конфеты из любых двух пакетов можно разложить в три оставшихся пакета так, что в этих трех пакетах конфет станет поровну. Докажите, что имеется пакет, в котором лежит ровно 7 конфет.

8.8. Имеется дробь $\dfrac{2006}{2007}$. Каждую секунду к ее числителю прибавляется число 6, а к знаменателю - число 7. Одно поверие гласит: в тот момент, когда получится дробь, сократимая на 11, математические олимпиады прекратятся. Докажите, что школьникам не следует этого бояться.

8.9. *Докажите теорему В.Э.Гейта.* Пусть уравнение относительно t

$$d - \frac{c^2}{4t} = \frac{1}{4}(t-b)^2$$

имеет положительный корень. Доказать, что тогда для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$x^4 + bx^2 + cx + d \geqslant 0.$$

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

9 класс
День первый

9.1. Докажите, что при $0 < x \leqslant 1/2,\ 0 < y \leqslant 1/2$ имеет место неравенство Ки Фана $\dfrac{x+y}{2-x-y} \geqslant \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$.

9.2. Существует ли такая плоская фигура F, что ею нельзя целиком накрыть полукруг радиусом 1, а двумя ее экземплярами можно целиком накрыть круг радиусом 1: а) если фигура F - невыпуклая, б) если фигура F - выпуклая?

9.3. На доске выписан набор натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Разрешается производить две операции: 1) стереть два числа и написать модуль их разности; 2) написать на доске среднее арифметическое любых двух чисел (ничего не стирая). Можно ли в какой-то момент получить набор

$$\frac{2007}{2}, \frac{2006}{4}, \frac{2005}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{2007}}\ ?$$

9.4. Известно, что для любого положительного числа V расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки объема V минимален, если высота банки равна диаметру основания. Опираясь на этот факт доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки и ручек) объема V минимален, если высота кастрюли равна половине диаметра ее основания.

Замечание. Для решения задачи, вообще говоря, не требуется знание следующих формул:

объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$,

площадь круга $S_c = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

площадь боковой поверхности цилиндра $S_b = \pi d h$,

где h - высота, d - диаметр цилиндра и $\pi \approx 3,14\ldots$.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

9 класс

День второй

9.5. Решить уравнение $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$.

9.6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена биссектриса AM. Найдите углы треугольника, если известно, что $BM=AC$

9.7. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1!(1+2)}+\frac{1}{2!(2+2)}+\frac{1}{3!(3+2)}+\ldots+\frac{1}{2006!(2006+2)}.$$

Здесь $n!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

9.8. По кругу расставлены n ($n>2007$) чисел, среди которых есть не равные. Известно, что сумма любых 13 стоящих подряд чисел не превосходит 13, а сумма любых 21 стоящих подряд чисел не превосходит 21. Докажите, что сумма всех n чисел строго меньше n.

9.9. Верно ли, что среди любых 50 попарно различных натуральных чисел от 1 до 100 всегда найдется или два числа с суммой 100, или точный квадрат.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

10 класс
День первый

10.1. Докажите, что если действительные коэффициенты квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяют условию $ac < 0$, то уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень.

10.2. Даны 100 целых чисел $a_1, \ldots, a_{100}$. Петя вычислил сумму:

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{100}}$$

и получил, что $S = 1$. Вася вычислил произведение $\Pi = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{100}$ этих чисел и получил число, оканчивающееся на 9876543210. Докажите, что хотя бы один из мальчиков ошибся в вычислениях.

10.3. Имеется треугольник с меньшей стороной c и противолежащим ей углом γ. Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше c. Докажите, что $\gamma \geqslant 36^o$

10.4. Известно, что для любого положительного числа V расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки объема V минимален, если высота банки равна диаметру основания. Опираясь на этот факт доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки и ручек) объема V минимален, если высота кастрюли равна половине диаметра ее основания.

Замечание. Для решения задачи, вообще говоря, не требуется знание следующих формул:

объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$,

площадь круга $S_c = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

площадь боковой поверхности цилиндра $S_b = \pi dh$,

где h - высота, d - диаметр цилиндра и $\pi \approx 3,14\ldots$.

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

10 класс

День второй

10.5. Решить в натуральных числах уравнение

$$x! + y! + z! = t!$$

Здесь, как обычно, $n!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

10.6. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \geqslant \frac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}.$$

10.7. Пусть BD - биссектриса угла B треугольника ABC. Точка E выбрана так, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$, и при этом отрезок ED пересекает отрезок AB в точке K. Докажите, что $KE = KD$.

10.8. Даны 333 отрезка с длинами 1, 2, 3, …, 333 см. Два игрока по очереди берут себе по одному отрезку, пока не останутся неразобранными ровно три отрезка. Если из этих отрезков можно сложить треугольник (ненулевой площади), то выигрывает первый игрок, если нельзя — второй. У кого из игроков, начинающего или его противника, есть выигрышная стратегия?

10.9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+1 = y^2 \\ y+1 = z^2 \\ z+1 = x^2 \end{cases}$$

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

11 класс
День первый

11.1. Решите при $x > 0$ неравенство $x\Big[x\big[x[x]\big]\Big] \leqslant 2007$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

11.2. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника выбираются, соответственно, точки P и Q, из которых на гипотенузу BC опускаются перпендикуляры PK и QH. Найдите наименьшее значение суммы $KP + PQ + QH$.

11.3. На доске выписали подряд 17 натуральных чисел : $1, 2, \ldots, 17$. Петя и Вася ставят по очереди в промежутках между этими числами знак "плюс"или "умножить", выбирая знак и место по своему усмотрению. Первым начинает ходить Петя, каждый из мальчиков делает по 8 ходов. После этого подсчитывается значение полученного на доске выражения. Докажите, что при правильной игре Вася всегда может добиться того, чтобы это значение было нечетным.

11.4. Два цилиндра имеют одинаковый объем V и одинаковую площадь S полной поверхности. При каких $S > 0$ и $V > 0$ эти цилиндры обязательно равны между собой?

ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
среди школьников Свердловской области

2006 — 2007 учебный год

11 класс
День второй

11.5. Известно, что для некоторого числа x числа $\sin 2x$,$\sin 5x$,$\sin 7x$ рациональны. Докажите, что число $\sin 12x$ тоже рационально.

11.6. В пространстве проведены три параллельные прямые. Докажите, что на каждой прямой можно выбрать точку так, чтобы эти три выбранные точки являлись вершинами равностороннего треугольника.

11.7. *Докажите теорему В.Э.Гейта.* Пусть уравнение относительно t

$$d - \frac{c^2}{4t} = \frac{1}{4}(t-b)^2$$

имеет положительный корень. Доказать, что тогда для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$x^4 + bx^2 + cx + d \geqslant 0.$$

11.8. На одном турнире командам была предложена олимпиада из 8 задач. Выяснилось, что каждая команда решила ровно 3 задачи. При этом любые две команды решили на двоих не менее 5 задач. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в турнире?

11.9. Докажите равенство:

$$\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = 3.$$